

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Ingeniería Eléctrica

**MATERIAL DE SOPORTE DOCENTE PARA LA ASIGNATURA  
DE ELECTROTECNIA**



**Volumen I**

**Memoria**

**Autor:** Kevin Félix Díez  
**Director:** Juan José Mesas García  
**Codirector:** Luis Sainz Sopera  
**Convocatoria:** Octubre 2019



## Resum

El present TFG consisteix en l'elaboració de material de suport docent amb continguts associats a l'assignatura d'Electrotècnia, present (amb aquest o un altre nom) als plans d'estudi d'escoles en les que s'imparteixen coneixements sobre Electricitat o Enginyeria.

La primera part del TFG consta d'uns apunts sobre el contingut fonamental de l'assignatura, en la qual es desenvolupa un temari dividit en dos grans blocs: un primer bloc de circuits monofàsics i un segon bloc de circuits trifàsics. El temari és apte per qualsevol persona que vulgui introduir-se al món de l'Electrotècnia, ja que recull els conceptes més bàsics associats als circuits propis d'aquesta disciplina.

La segona part del TFG consta d'uns programes, desenvolupats amb l'eina Matlab, per facilitar la consolidació dels conceptes que es veuen a la primera part. Aquesta segona part no requereix nivell de coneixement de programació per part de l'usuari, ja que els programes són totalment funcionals i interactuen amb l'usuari a través de la finestra de comandos de Matlab.

## Resumen

El presente TFG consiste en la elaboración de material de soporte docente con contenidos asociados a la asignatura de Electrotecnia, presente (con este u otro nombre) en los planes de estudio de escuelas en las que se imparten conocimientos sobre Electricidad o Ingeniería.

La primera parte del TFG consta de unos apuntes sobre el contenido fundamental de la asignatura, en la cual se desarrolla un temario dividido en dos grandes bloques: un primer bloque de circuitos monofásicos y un segundo bloque de circuitos trifásicos. El temario es apto para cualquier persona que quiera introducirse en el mundo de la Electrotecnia, ya que recoge los conceptos más básicos asociados a los circuitos propios de dicha disciplina.

La segunda parte del TFG consta de unos programas, desarrollados con la herramienta Matlab, para facilitar la consolidación de los conceptos que se ven en la primera parte. Esta segunda parte no requiere nivel de conocimiento de programación por parte del usuario, ya que los programas son totalmente funcionales e interactúan con el usuario a través de la ventana de comandos de Matlab.

## Abstract

The present TFG consists of the elaboration of educational support material with contents associated to the subject of Electrotechnics, existing (with this or another name) in the curriculum of other schools in which knowledge about Electricity or Engineering is imparted.

The first part of the TFG consists of some notes on the fundamental content of the subject, where a syllabus divided into two large blocks is developed: a first block of single-phase circuits and a second block of three-phase circuits. The syllabus is suitable for anyone who wants to enter the world of Electrotechnics, as it includes the most basic concepts associated with the circuits of said discipline.

The second part of the TFG consists of some programs, developed with the Matlab tool, to facilitate the consolidation of the concepts seen in the first part. This second part does not require any level of programming knowledge by the user, since the programs are fully functional and interact with the user through the Matlab command window.



# Índice

<b>RESUM</b>	<b>I</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>II</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>III</b>
<b>1. OBJETIVO DEL TFG</b>	<b>1</b>
<b>2. ALCANCE DEL TFG</b>	<b>3</b>
<b>3. AGRADECIMIENTOS</b>	<b>5</b>
<b>4. CIRCUITOS MONOFÁSICOS</b>	<b>7</b>
4.1. Introducción.....	7
4.2. Magnitudes eléctricas fundamentales.....	10
4.3. Flechas de valoración de tensiones y corrientes.....	11
4.4. Leyes de Kirchhoff .....	12
4.4.1. Primera ley de Kirchhoff o ley de las corrientes .....	12
4.4.2. Segunda ley de Kirchhoff o ley de las tensiones.....	13
4.5. Clasificación de elementos de un circuito .....	14
4.5.1. Elementos activos.....	14
4.5.2. Elementos pasivos .....	15
4.6. Relaciones tensión-corriente .....	15
4.6.1. Generales .....	15
4.6.2. Régimen permanente con alimentación continua.....	16
4.6.3. Régimen permanente con alimentación alterna.....	19
4.6.3.1. Fasores.....	19
4.7. Cálculo de potencias y energías absorbidas por elementos.....	27
4.7.1. Fórmulas generales.....	27
4.7.2. Régimen permanente con alimentación continua.....	28
4.7.3. Régimen permanente con alimentación alterna.....	29
4.7.3.1. Mejora del factor de potencia .....	40
4.8. Linealidad. Teorema de superposición .....	42
4.8.1. Régimen permanente con alimentación continua.....	43
4.8.2. Régimen permanente con alimentación alterna.....	46
4.9. Circuitos equivalentes .....	49
4.9.1. Régimen permanente con alimentación continua.....	50
4.9.1.1. Asociación de resistores.....	50

4.9.1.2. Transformación estrella - triángulo .....	50
4.9.1.3. Asociación de fuentes .....	52
4.9.1.4. Transformación de fuentes.....	53
4.9.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton .....	53
4.9.1.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia .....	57
4.9.2. Régimen permanente con alimentación alterna .....	58
4.9.2.1. Asociación de impedancias.....	58
4.9.2.2. Transformación estrella – triángulo .....	59
4.9.2.3. Asociación de fuentes .....	60
4.9.2.4. Transformación de fuentes.....	61
4.9.2.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton .....	62
4.9.2.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia (activa) .....	66
<b>5. CIRCUITOS TRIFÁSICOS .....</b>	<b>69</b>
5.1. Introducción .....	69
5.2. Generador trifásico .....	69
5.2.1. Estructura .....	69
5.2.2. Tensiones fase-neutro, de fase, simples o sencillas .....	70
5.2.3. Tensiones fase-fase, de línea o compuestas .....	71
5.3. Cargas trifásicas .....	75
5.3.1. Estructuras .....	75
5.3.2. Fases de la carga en función de su estructura.....	76
5.3.3. Tipos .....	76
5.4. Cálculo de tensiones y corrientes asociadas a las cargas trifásicas .....	77
5.4.1. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella equilibrada conectada al neutro del generador .....	77
5.4.2. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella equilibrada desconectada del neutro del generador .....	78
5.4.3. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador .....	79
5.4.4. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador .....	81
5.4.5. Generador trifásico que alimenta a carga en triángulo equilibrada .....	83
5.4.6. Generador trifásico que alimenta a carga en triángulo desequilibrada.....	84
5.5. Cálculo de potencias absorbidas por las cargas trifásicas.....	86
5.5.1. Carga en estrella equilibrada.....	86
5.5.1.1. Potencia activa .....	86



5.5.1.2. Potencia reactiva .....	86
5.5.1.3. Potencia compleja .....	87
5.5.1.4. Potencia aparente .....	87
5.5.2. Carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador .....	88
5.5.2.1. Potencia activa .....	88
5.5.2.2. Potencia reactiva .....	88
5.5.2.3. Potencia compleja .....	88
5.5.2.4. Potencia aparente .....	89
5.5.3. Carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador .....	89
5.5.3.1. Potencia activa .....	89
5.5.3.2. Potencia reactiva .....	90
5.5.3.3. Potencia compleja .....	90
5.5.3.4. Potencia aparente .....	90
5.5.4. Carga en triángulo equilibrada .....	91
5.5.4.1. Potencia activa .....	91
5.5.4.2. Potencia reactiva .....	91
5.5.4.3. Potencia compleja .....	91
5.5.4.4. Potencia aparente .....	92
5.5.5. Carga en triángulo desequilibrada .....	92
5.5.5.1. Potencia activa .....	92
5.5.5.2. Potencia reactiva .....	93
5.5.5.3. Potencia compleja .....	93
5.5.5.4. Potencia aparente .....	94
5.5.6. Mejora del factor de potencia en circuitos trifásicos equilibrados .....	94
<b>6. ANÁLISIS DE IMPACTO AMBIENTAL .....</b>	<b>97</b>
<b>7. PRESUPUESTO .....</b>	<b>99</b>
<b>8. CONCLUSIONES .....</b>	<b>101</b>
<b>9. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>103</b>



## 1. Objetivo del TFG

El objetivo del presente TFG es la revisión y el desarrollo de material de soporte docente para facilitar la asimilación de contenidos asociados a la asignatura de Electrotecnia, presente (con este u otro nombre) en los planes de estudio de escuelas en las que se imparten conocimientos sobre Electricidad o Ingeniería. En concreto, se pretenden elaborar:

- Unos apuntes con los conceptos fundamentales y las formulas básicas que se emplean en la asignatura de Electrotecnia. Se abarcarán los temas de circuitos monofásicos y trifásicos en régimen permanente.
- Una serie de programas en entorno Matlab que permitan poner en práctica los conceptos y las fórmulas anteriores.



## 2. Alcance del TFG

Para lograr el objetivo del TFG, en cuanto al primer bloque del temario tratado en los apuntes, circuitos monofásicos, se caracterizan sus elementos fundamentales y se expone cómo calcular las tensiones y corrientes asociadas a ellos, tanto en régimen permanente con alimentación continua como en régimen permanente con alimentación alterna, haciendo alguna pequeña incursión en su funcionamiento en régimen transitorio. Además, también en régimen permanente y para ambos tipos de alimentación, se enseña el cálculo de potencias y energías absorbidas por elementos, así como la propiedad de linealidad y el teorema de superposición, finalizando con la obtención de circuitos equivalentes a uno dado.

En lo que se refiere al segundo bloque del temario tratado en los apuntes, circuitos trifásicos, también se caracterizan sus elementos fundamentales y se expone cómo calcular las tensiones y corrientes asociadas a ellos, pero sólo en régimen permanente con alimentación alterna. Además, en ese régimen y para ese tipo de alimentación, se enseña el cálculo de potencias absorbidas por elementos.

Por último, se desarrollan 45 programas en Matlab (versión R2016b) que cubren la totalidad del temario tratado en los apuntes y que van numerados en el anexo a esta memoria siguiendo el orden de aparición del concepto o fórmula en dichos apuntes.



### 3. Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a mi familia y amigos el apoyo y los ánimos para seguir adelante con el Grado y el presente TFG.

En segundo lugar, agradecer a los directores la atención y la ayuda recibida durante todo el proceso de elaboración del presente TFG. Sus consejos y supervisión han ayudado a alcanzar todos los objetivos establecidos.

También deseo expresar mi agradecimiento a los profesores Joaquín Pedra, Juan Antonio García-Alzórriz y Rodolfo Oseira por yo haber dispuesto de material docente suyo proporcionado por mis directores para la realización de este TFG.





## 4. Circuitos monofásicos

### 4.1. Introducción

Un circuito se define como un conjunto de elementos (en esta asignatura, elementos eléctricos) interconectados entre sí.

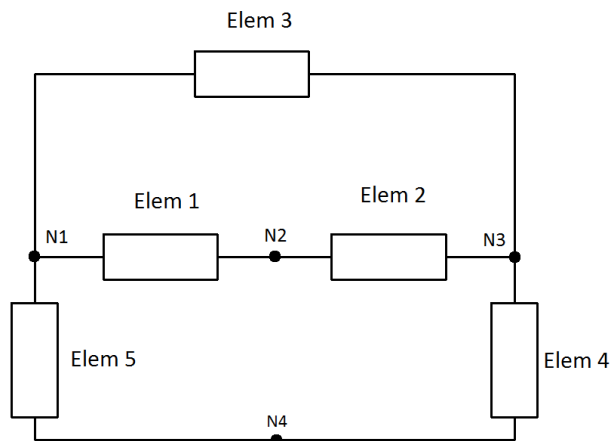
Un circuito monofásico se define como aquel formado por solo dos elementos:

- Un generador monofásico constituido por una fuente de tensión alterna.
- Una carga monofásica constituida por una impedancia equivalente.

Entender las definiciones anteriores, así como aprender a transformar un circuito dado en uno monofásico equivalente, requiere conocer unas leyes y conceptos básicos. A continuación, se dan una serie de definiciones previas.

El punto donde se unen dos o más elementos se denomina **nudo**.

Entre esos nudos existen **nudos fundamentales**, que son aquellos que unen tres o más elementos. El número de nudos fundamentales, por definición, ha de ser igual o inferior al número de nudos.



**Figura 4.1.1. Clasificación de nudos**

En la figura 4.1.1 se ven cuatro nudos, de los cuales dos son nudos fundamentales (el nudo N1 y el nudo N3, pues ambos unen tres elementos). En el caso del nudo N1, une el elemento 5, el elemento 1 y el elemento 3.

La unión de dos nudos a través de un elemento se denomina **rama**.

Entre esas ramas existen **ramas fundamentales**, que son aquellas que unen dos nudos fundamentales sin pasar por un tercer nudo fundamental. Por definición, el número de ramas fundamentales ha de ser menor o igual al número de ramas.

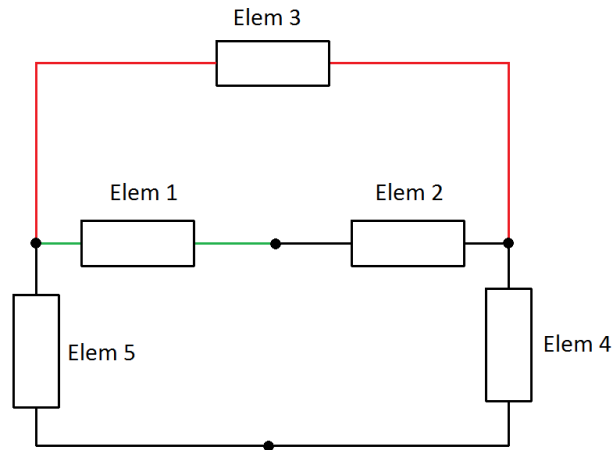


Figura 4.1.2. Clasificación de ramas

En la figura 4.1.2 se ven cinco ramas (un ejemplo es la que se puede ver de color verde), de las cuales una es rama fundamental. La rama fundamental es la rama en la que está el elemento 3, de color rojo, que une dos nudos fundamentales.

La **trayectoria** es el camino que une dos nudos pasando por uno o más elementos sin pasar una segunda vez por ningún nudo.

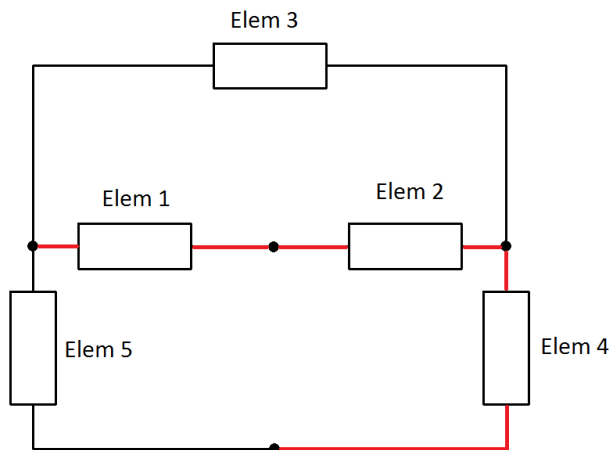


Figura 4.1.3. Ejemplo trayectoria

El **lazo** es el camino cerrado que pasa por varios elementos sin pasar una segunda vez por ningún nudo, excepto el inicial.

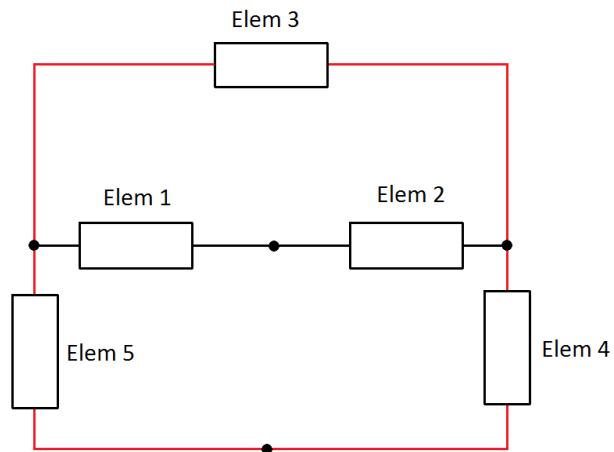


Figura 4.1.4. Ejemplo lazo

Una **mall**a es aquel lazo que no contiene en su interior otros lazos.

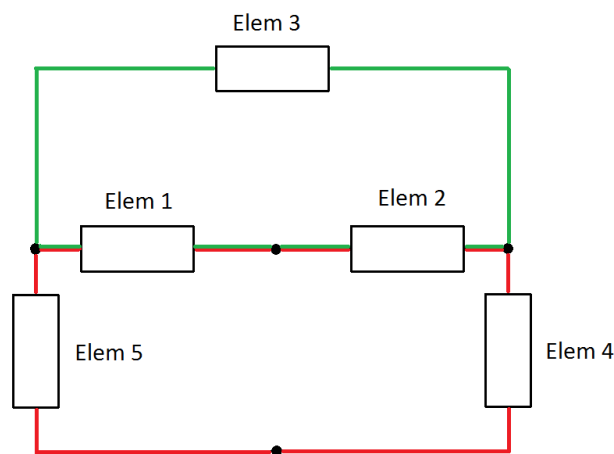


Figura 4.1.5. Ejemplo mallas

Se clasifica un circuito eléctrico como **circuito plano** cuando ninguna rama pasa por debajo ni por encima de otra rama.

A continuación, se puede ver un ejemplo de **circuito no plano**.

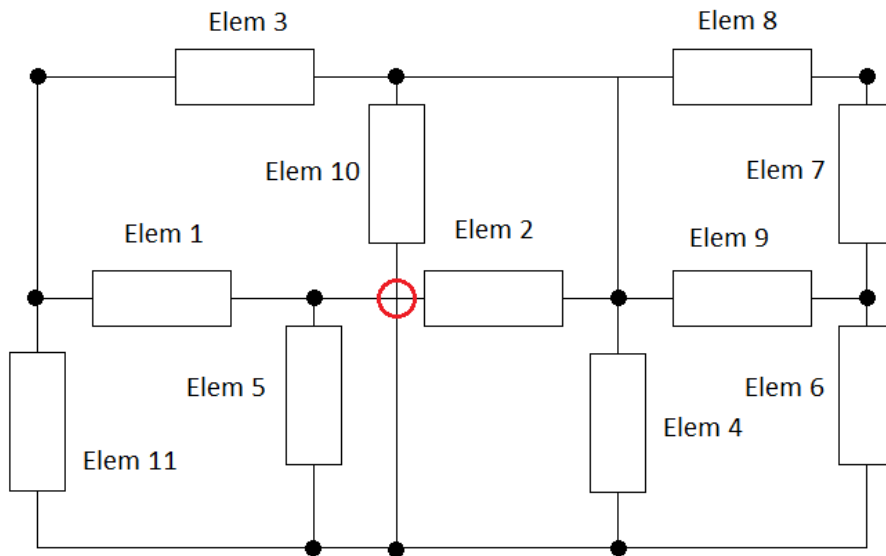


Figura 4.1.6. Circuito no plano

La razón por la que es un circuito no plano está resaltada en color rojo; una rama pasa por encima o por debajo de otra.

## 4.2. Magnitudes eléctricas fundamentales

La **carga eléctrica** es una propiedad física de algunas partículas, cuando presenta exceso o defecto de electrones. Con el movimiento de dichos electrones se obtiene transferencia de energía. Se representa con la letra  $q$  y se expresa utilizando el S.I. en culombios con el símbolo C.

La **corriente eléctrica** viene definida por el flujo de carga eléctrica (variación de  $q$  con el tiempo).

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (\text{Ec 4.2.1})$$

Se representa con la letra  $i$  y se expresa utilizando el S.I. en amperios con el símbolo A.

**Voltaje, tensión o diferencia de potencial**, es la fuerza electromotriz ejercida sobre las cargas para que se genere flujo de cargas y por lo tanto corriente eléctrica. Cuanto mayor sea la fuerza ejercida, mayor será el voltaje. Se representa con la letra  $v$  y se expresa utilizando el S.I. en voltios con el símbolo V.

La **energía eléctrica** es la obtenida debido a una diferencia de potencial y por lo tanto un movimiento de las cargas. Se representa con la letra  $w$  y se expresa utilizando el S.I. en julios con el símbolo J.

La **potencia eléctrica** es la cantidad de energía cedida o absorbida por un elemento en un tiempo determinado. Se representa con la letra  $p$  y se expresa utilizando el S.I. en vatios con el símbolo  $W$ .

### 4.3. Flechas de valoración de tensiones y corrientes

Todo elemento de un circuito viene caracterizado por dos magnitudes: tensión que soporta y corriente que lo atraviesa. Resolver un circuito consiste en determinar cuánto valen esas dos magnitudes para todos los elementos del mismo. En cada elemento, una vez determinadas esas dos magnitudes, otras magnitudes como la potencia o la energía absorbidas por dicho elemento son calculables a partir de ellas como se verá más adelante.

En la resolución de un circuito se emplean las leyes de Kirchhoff (explicadas en el próximo apartado 4.4), lo cual implica asignar un sentido a las magnitudes tensión y corriente en cada elemento del circuito. Para ello se utilizan las flechas de valoración. A partir de ellas, se deciden los signos en las leyes de Kirchhoff.

En el presente tema, el sentido de la flecha de valoración de la intensidad es arbitrario, aunque por convenio vaya del terminal que se supone positivo al negativo. El signo del resultado final determinará el sentido real de la intensidad.

En los circuitos de corriente alterna, invertir el sentido de la flecha de valoración solo afecta en un desfase de  $180^\circ$  a la corriente. Para el caso de corriente continua, el sentido real será el inverso a la flecha de valoración en caso de que la corriente tenga un resultado negativo.

Igualmente, el sentido de la flecha de valoración de la tensión es arbitrario, aunque por convenio vaya del terminal que se supone de mayor potencial, al de menor potencial, de forma análoga a la corriente. El signo del resultado final determinará el sentido real de la tensión.

En el caso de tensión alterna, invertir el sentido de la flecha de valoración solo añade un desfase de  $180^\circ$  a la tensión. Para el caso de tensión continua, si el resultado es negativo, indica que el sentido real es inverso al indicado por la flecha de valoración.

Finalmente, comentar que para asignar sentido a las tensiones es frecuente la utilización de polaridades en lugar de flechas de valoración. Ello implica poner un signo  $+$  en el terminal que se supone de mayor potencial y un signo  $-$  en el terminal que se supone de menor potencial. El signo del resultado final determinará el sentido real de la tensión.

## 4.4. Leyes de Kirchhoff

### 4.4.1. Primera ley de Kirchhoff o ley de las corrientes

La primera ley de Kirchhoff se centra en los nudos del circuito y se cumple en todo instante de tiempo. La ley dice que en los nudos no se consume ni genera carga. Por lo tanto, la suma de intensidades en un nudo es nula, es decir, toda la intensidad que llega a un nudo ha de salir de ese nudo:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad \forall t \quad (\text{Ec 4.4.1.1})$$

donde  $n$  es el número de ramas conectadas al nudo.

El criterio de signos a seguir es el siguiente: Cuando la flecha de valoración asignada a la intensidad entra al nudo, se considera positiva. Si la flecha de valoración asignada a la intensidad sale del nudo, se considera negativa.

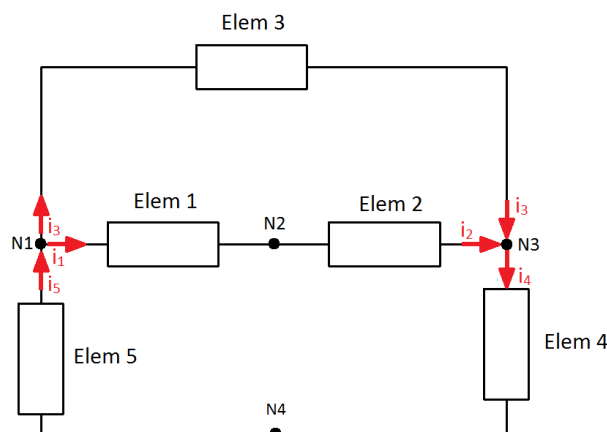


Figura 4.4.1.1. Ejemplo primera ley de Kirchhoff

Dado el circuito de la figura, asignamos arbitrariamente las flechas de valoración de corriente mostradas.

Si se formula la primera ley de Kirchhoff en los nudos fundamentales N1 y N3 de la figura 4.4.1.1, quedan las siguientes ecuaciones:

$$N1 : i_5 - i_1 - i_3 = 0 \quad (\text{Ec 4.4.1.2})$$

$$N3 : i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad (\text{Ec 4.4.1.3})$$

#### 4.4.2. Segunda ley de Kirchhoff o ley de las tensiones

La segunda ley de Kirchhoff se centra en los lazos del circuito y se cumple para todo instante de tiempo. Se cumple para el caso particular de una malla, a través de la ley de conservación de la energía. La segunda ley de Kirchhoff dice que la suma de tensiones en un lazo es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0 \quad \forall t \quad (\text{Ec 4.4.2.1})$$

donde  $n$  es el número de elementos que forman parte del lazo.

El criterio de signos a seguir es el siguiente: La caída de tensión es positiva si en el sentido de giro del lazo se entra por el terminal positivo del elemento. Por el contrario, la caída de tensión es negativa si en el sentido de giro del lazo se entra por el terminal negativo. Otra forma de verlo es la siguiente: Si el elemento y el lazo comparten sentido, el elemento tiene una caída de tensión positiva. Por el contrario, si el elemento y el lazo tienen sentidos opuestos, el elemento tiene una caída de tensión negativa.

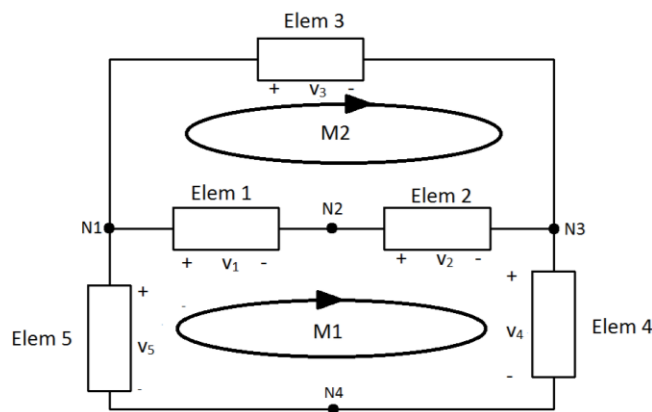


Figura 4.4.2.1. Ejemplo segunda ley de Kirchhoff

Dado el circuito de la figura, asignamos arbitrariamente las polaridades de tensión mostradas y los sentidos de recorrido de malla indicados.

Si se formula la segunda ley de Kirchhoff en las mallas M1 y M2 de la figura 4.4.2.1, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$M1 : v_1 + v_2 + v_4 - v_5 = 0 \quad (\text{Ec 4.4.2.2})$$

$$M2 : v_3 - v_2 - v_1 = 0 \quad (\text{Ec 4.4.2.3})$$

## 4.5. Clasificación de elementos de un circuito

Los elementos que forman un circuito se pueden clasificar en activos y pasivos.

### 4.5.1. Elementos activos

Los elementos clasificados como activos son aquellos que aportan energía eléctrica al sistema, tales como **baterías** o **fuentes**.

Las fuentes, en función de la magnitud que fijan, pueden ser fuentes de corriente o fuentes de tensión. Las fuentes de corriente, fijan el valor de la corriente y el valor de la tensión lo impone el circuito. Por el contrario, las fuentes de tensión, fijan el valor de la tensión y el valor de la corriente lo impone el circuito.

A continuación se puede ver el símbolo de una batería, una fuente de tensión y una fuente de corriente respectivamente.

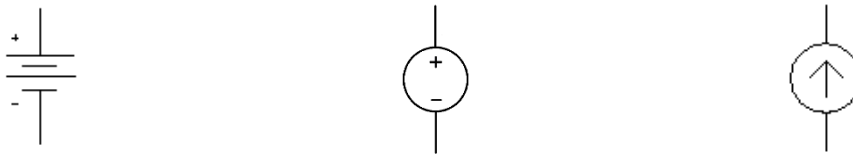


Figura 4.5.1.1. Elementos activos

Otra forma de clasificación es por el tipo de alimentación que proporcionan, existiendo: fuentes de continua o fuentes de alterna.

Las fuentes de continua se caracterizan por dar un valor de magnitud constante en el tiempo. Este valor es el que las caracteriza, ya sean de tensión o de corriente.

Las fuentes de alterna se caracterizan por dar un valor de magnitud sinusoidal en el tiempo. Tres parámetros las caracterizan; ya sean de tensión o de corriente: el valor máximo o de pico, la pulsación y el ángulo de fase.

$$v(t) = V_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad (\text{Ec 4.5.1.1})$$

$$i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta) \quad (\text{Ec 4.5.1.2})$$

Donde  $V, I$  son los valores eficaces de las ondas sinusoidales;  $\alpha, \beta$  sus ángulos de fase y  $\omega$  es la pulsación, la cual es función de la frecuencia (o del periodo):



$$\omega = 2 \pi \cdot f \left( = \frac{2 \pi}{T} \right) \quad (\text{Ec 4.5.1.3})$$

La frecuencia es el número de repeticiones (o ciclos) por segundo (típico 50 Hz). El periodo es el tiempo empleado en hacer un ciclo (típico 20 ms).

#### 4.5.2. Elementos pasivos

Los elementos clasificados como pasivos son aquellos que absorben energía eléctrica del sistema. Hay tres: resistor, inductor y condensador. El resistor disipa en forma de calor la energía absorbida, el inductor acumula la energía absorbida en forma de energía electromagnética y el condensador acumula la energía absorbida en forma de energía electrostática.

A continuación se puede ver el símbolo de un resistor, un inductor y un condensador respectivamente.

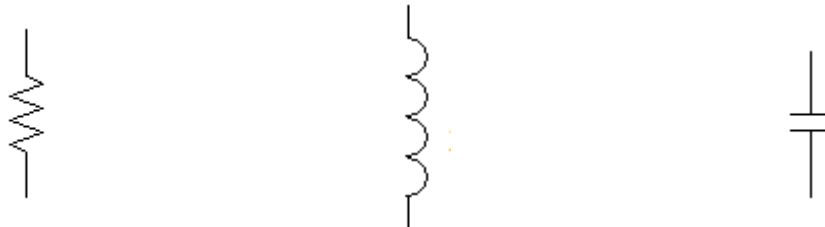


Figura 4.5.1.2. Elementos pasivos

### 4.6. Relaciones tensión-corriente

#### 4.6.1. Generales

La primera ley que trataremos será la ley de Ohm, la cual establece que la intensidad que circula por un elemento resistivo es directamente proporcional a la tensión que soporta:

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad ; \quad i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (\text{Ec 4.6.1.1})$$

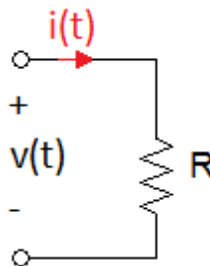
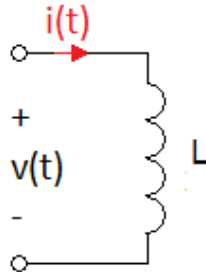


Figura 4.6.1.1. Circuito asociado a las anteriores relaciones tensión-corriente en un resistor

R es una constante denominada resistencia cuya unidad en el SI es el Ohmio ( $\Omega$ ).

Para el caso de un elemento inductivo, las relaciones tensión-corriente son las siguientes:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad ; \quad i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int v(t) dt \quad (\text{Ec 4.6.1.2})$$

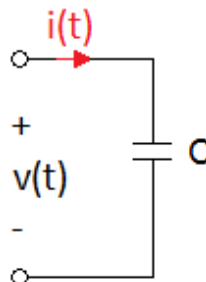


**Figura 4.6.1.2. Circuito asociado a las anteriores relaciones tensión-corriente en un inductor**

L es una constante denominada inductancia cuya unidad en el SI es el Henrio (H).

Para el caso de un elemento capacitivo, las relaciones tensión-corriente son las siguientes:

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad ; \quad i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{Ec 4.6.1.3})$$



**Figura 4.6.1.3. Circuito asociado a las anteriores relaciones tensión-corriente en un condensador**

C es una constante denominada capacidad cuya unidad en el SI es el Faradio (F).

#### 4.6.2. Régimen permanente con alimentación continua

El régimen permanente con alimentación continua es aquel que no varía su amplitud en función del tiempo, por lo que se puede decir que es una alimentación a frecuencia cero. Así pues, en este régimen se cumple que  $v(t) = V$  e  $i(t) = I$ , es decir, ambas magnitudes eléctricas son funciones constantes en el tiempo.

La relación tensión-corriente en un sistema puramente resistivo viene dada por la ley de Ohm. Teniendo en cuenta solo la resistencia, queda de la siguiente forma:

$$V = R \cdot I \quad (\text{Ec 4.6.2.1})$$

En el caso de un sistema puramente inductivo, este se comporta como un cortocircuito, es decir, opone resistencia (más propiamente denominada reactancia inductiva  $X_L$ ) cero. Se demuestra de la siguiente forma:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot 0 = 0 \text{ V} \quad (\text{Ec 4.6.2.2})$$

La derivada de la intensidad respecto del tiempo es nula ya que la intensidad no varía en función del tiempo. Se está trabajando a frecuencia cero y se cumple:

$$X_L = 2 \pi \cdot f \cdot L = 2 \pi \cdot 0 \cdot L = 0 \Omega \quad (\text{Ec 4.6.2.3})$$

En el caso de un sistema puramente capacitivo, este se comporta como un circuito abierto (de forma opuesta a un inductivo), es decir, opone resistencia (más propiamente denominada reactancia capacitiva  $X_C$ ) infinita. Se demuestra de la siguiente forma:

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} = C \cdot 0 = 0 \text{ A} \quad (\text{Ec 4.6.2.4})$$

La tensión no varía en función del tiempo y la derivada de la tensión respecto del tiempo es nula. Se está trabajando a frecuencia cero y se cumple:

$$X_C = \frac{1}{2 \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \quad (\text{Ec 4.6.2.5})$$

Para llegar a este estado de régimen permanente, primero se pasa por un régimen transitorio, el cual está formado por dos componentes: la componente natural y la componente forzada.

Esto se va a ejemplificar con el siguiente circuito:

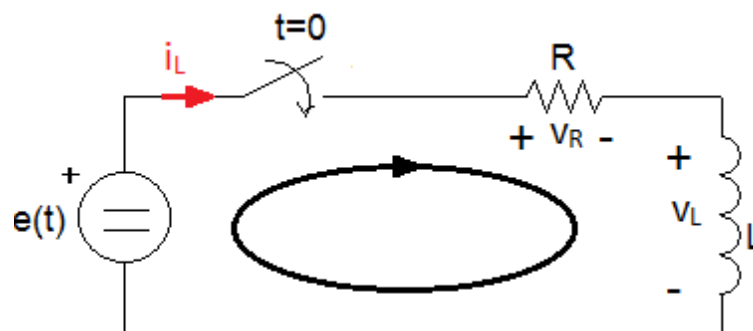


Figura 4.6.2.1. Circuito RL con interruptor

El interruptor se cerrará en el instante 0, con ello empezará a circular corriente por el circuito y sucederá un primer periodo transitorio antes de asumir el régimen permanente. Para ver este fenómeno se van a utilizar conceptos ya explicados.

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

$$e(t) = E \quad i_L(t) = I_0$$

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la expresión:

$$-e(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0$$

Substituyendo las tensiones:

$$E = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Dividiendo toda la ecuación por L:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot E$$

La solución será del tipo:

$$i_{Ln}(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, K \in \mathbb{R}$$

$$i_{Lf}(t) = \frac{E}{R}$$

$$i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lf}(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R}, K \in \mathbb{R}$$

Teniendo presente que:

$$\left. \begin{array}{l} i_L(0) = I_0 \\ i_L(0) = K + \frac{E}{R} \end{array} \right\} K = I_0 - \frac{E}{R}$$

La solución queda así:

$$i_L(t) = \left( I_0 - \frac{E}{R} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R} \quad (\text{Ec 4.6.2.6})$$

Las anteriores funciones de corriente en el tiempo quedan graficadas de la siguiente forma:

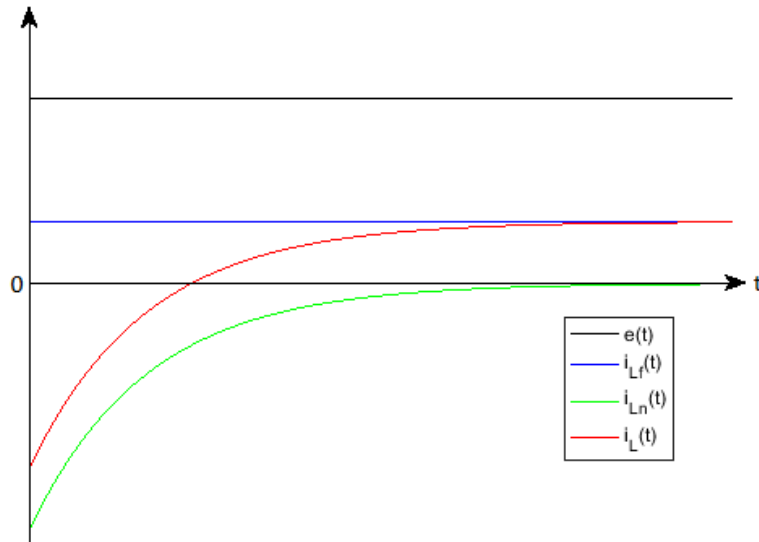


Figura 4.6.2.2. Régimen transitorio de las funciones de corriente en el circuito RL

Al hacer el límite de  $i_L(t)$  cuando el tiempo tiende a infinito, se comprueba que se llega al régimen permanente de  $i_L(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = \frac{E}{R} \quad (\text{Ec 4.6.2.7})$$

### 4.6.3. Régimen permanente con alimentación alterna

El régimen permanente con alimentación alterna, es aquel que varía su amplitud en función del tiempo con una determinada frecuencia.

#### 4.6.3.1. Fasores

Para iniciar el estudio de circuitos en corriente alterna y régimen permanente, hay que tener conocimiento de los fasores. Estos son una herramienta matemática que facilita los procesos de cálculos en corriente alterna. Son números complejos giratorios en el plano de Gauss que representan funciones sinusoidales.

Estos se pueden representar de tres formas distintas: representación exponencial, polar y cartesiana, en este mismo orden:

$$E = F \cdot e^{j\alpha} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.1})$$

$$E = F \angle \alpha \quad (\text{Ec 4.6.3.1.2})$$

$$E = F \cdot \cos(\alpha) + j \cdot F \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{Ec 4.6.3.1.3})$$

Donde  $j$  es:

$$j = \sqrt{-1} = 1 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = 1 \angle 90^\circ = 1 \cdot \cos(90^\circ) + j \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) \quad (\text{Ec 4.6.3.1.4})$$

Partiendo de una función sinusoidal, se construye un fasor de la siguiente forma:

$$f(t) = \sqrt{2} \cdot F \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma) \Rightarrow E = F \cdot e^{j\gamma} = F \angle \gamma = F \cdot \cos(\gamma) + j \cdot F \cdot \sin(\gamma) \quad (\text{Ec 4.6.3.1.5})$$

El fasor está formado por el valor eficaz, en este caso  $F$ , y el ángulo de fase, en este caso  $\gamma$ . Dicho fasor gira en el plano de Gauss a una velocidad angular igual a  $\omega$  (pulsación asociada a la función sinusoidal).

La **suma** de fasores, se realiza de una forma más sencilla si estos están expresados de forma cartesiana. La parte real del fasor resultante es la suma de las partes reales de los fasores a sumar. La parte imaginaria del fasor resultante es la suma de las partes imaginarias de los fasores a sumar.

$$\begin{aligned} \underline{E1} + \underline{E2} &= F1 \cdot \cos(\alpha) + j \cdot F1 \cdot \sin(\alpha) + F2 \cdot \cos(\beta) + j \cdot F2 \cdot \sin(\beta) = \\ &= (F1 \cdot \cos(\alpha) + F2 \cdot \cos(\beta)) + j \cdot (F1 \cdot \sin(\alpha) + F2 \cdot \sin(\beta)) \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.6})$$

La **resta** de fasores, se realiza de forma similar a la suma. La parte real del fasor resultante es la diferencia de las partes reales de los fasores a restar. La parte imaginaria del fasor resultante es la diferencia de las partes imaginarias de los fasores a restar.

$$\begin{aligned} \underline{E1} - \underline{E2} &= F1 \cdot \cos(\alpha) + j \cdot F1 \cdot \sin(\alpha) - (F2 \cdot \cos(\beta) + j \cdot F2 \cdot \sin(\beta)) = \\ &= (F1 \cdot \cos(\alpha) - F2 \cdot \cos(\beta)) + j \cdot (F1 \cdot \sin(\alpha) - F2 \cdot \sin(\beta)) \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.7})$$

La **multiplicación** de fasores, se realiza de una forma más sencilla si estos están expresados de forma polar. El módulo resultante de la multiplicación es la multiplicación de módulos de los fasores a multiplicar. El argumento resultante de la multiplicación es la suma de los argumentos de los fasores a multiplicar.

$$\underline{E1} \cdot \underline{E2} = F1 \angle \alpha \cdot F2 \angle \beta = F1 \cdot F2 \angle \alpha + \beta \quad (\text{Ec 4.6.3.1.8})$$

La **división** de fasores, se realiza de forma similar a la multiplicación. El módulo resultante de la división es la división de módulos de los fasores a dividir. El argumento resultante de la división es la diferencia de los argumentos a dividir.

$$\frac{\underline{E1}}{\underline{E2}} = \frac{F1 \angle \alpha}{F2 \angle \beta} = \frac{F1}{F2} \angle \alpha - \beta \quad (\text{Ec 4.6.3.1.9})$$

La multiplicación o división de un fasor por un complejo, afectará al módulo y al argumento del fasor.

$$\underline{F1} \cdot \underline{C} = F1 \angle \alpha \cdot C \angle \beta = F1 \cdot C \angle \alpha + \beta$$

$$\frac{\underline{F1}}{\underline{C}} = \frac{F1 \angle \alpha}{C \angle \beta} = \frac{F1}{C} \angle \alpha - \beta \quad (\text{Ec 4.6.3.1.10})$$

La multiplicación o división de un fasor por un escalar, solo afectará al módulo del fasor, y no al argumento.

$$\underline{F1} \cdot A = F1 \angle \alpha \cdot A = F1 \cdot A \angle \alpha \quad (\text{Ec 4.6.3.1.11})$$

$$\frac{\underline{F1}}{A} = \frac{F1 \angle \alpha}{A} = \frac{F1}{A} \angle \alpha$$

El **conjugado** de un fasor, afecta al ángulo, cambiándolo de signo, mientras que el módulo no se ve afectado por esta operación.

$$\underline{F1}^* = (F1 \angle \alpha)^* = F1 \angle -\alpha \quad (\text{Ec 4.6.3.1.12})$$

El **inverso** de un fasor, afectará al módulo y al argumento del fasor.

$$\frac{1}{\underline{F1}} = \frac{1}{F1 \angle \alpha} = \frac{1}{F1} \angle -\alpha \quad (\text{Ec 4.6.3.1.13})$$

La **derivación** se va a demostrar con una función cosenoidal. Esta podrá aplicarse a funciones sinusoidales de la misma forma.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{2} \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) = -\sqrt{2} \cdot X \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = \\ &= \sqrt{2} \cdot X \cdot \omega \cdot \sin(-\omega \cdot t - \alpha) = \sqrt{2} \cdot X \cdot \omega \cdot \cos\left(-\omega \cdot t - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot X \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.14})$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow X \cdot \omega \angle \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = X \angle \alpha \cdot \omega \cdot 1 \angle \frac{\pi}{2} = j \cdot \omega \cdot X \quad (\text{Ec 4.6.3.1.15})$$

La **integración** se va a demostrar con una función cosenoidal. Esta podrá aplicarse a funciones sinusoidales de la misma forma.

$$\begin{aligned} \int x(t) dt &= \int \sqrt{2} \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) dt = \sqrt{2} \cdot \frac{X}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{X}{\omega} \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.16})$$

$$\int x(t) dt \Rightarrow \frac{X}{\omega} \angle \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = X \angle \alpha \cdot \frac{1}{\omega} \cdot 1 \angle -\frac{\pi}{2} = \frac{X}{j \cdot \omega} \quad (\text{Ec 4.6.3.1.17})$$

A continuació, se van a presentar exemples de aplicacions elèctriques de les anteriors operacions matemàtiques con fasors.

La suma y la resta de fasors se aplican en las leyes de Kirchhoff, quedando de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (\text{Ec 4.6.3.1.18})$$

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0 \quad (\text{Ec 4.6.3.1.19})$$

La multiplicació de fasors y el conjugado se utiliza para calcular la potencia compleja, explicada en el apartado 4.7.3.

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = V \angle \alpha \cdot (I \angle \beta)^* = V \angle \alpha \cdot I \angle -\beta = V \cdot I \angle \alpha - \beta = S \angle \varphi \quad (\text{Ec 4.6.3.1.20})$$

La divisió de fasors se ve en la aplicació de la ley de Ohm para el cálculo de una **impedancia**:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V \angle \alpha}{I \angle \beta} = \frac{V}{I} \angle \alpha - \beta = Z \angle \varphi = R + j \cdot X \quad (\text{Ec 4.6.3.1.21})$$

R es una constante denominada **resistencia** cuya unidad en el SI es el Ohmio ( $\Omega$ ) y X es una constante denominada **reactancia** cuya unidad en el SI es también el Ohmio ( $\Omega$ ).

El inverso de un número complejo se aplica en el cálculo de una **admitancia**:

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = (Z \angle \varphi)^{-1} = \frac{1}{Z} \angle -\varphi = Y \angle -\varphi = G + j \cdot B \quad (\text{Ec 4.6.3.1.22})$$

G es una constante denominada **conductancia** cuya unidad en el SI es el Siemens (S) y B es una constante denominada **susceptancia** cuya unidad en el SI es también el Siemens (S).

La multiplicació de un complejo por un fasor también se aplica en la ley de Ohm para una impedancia.

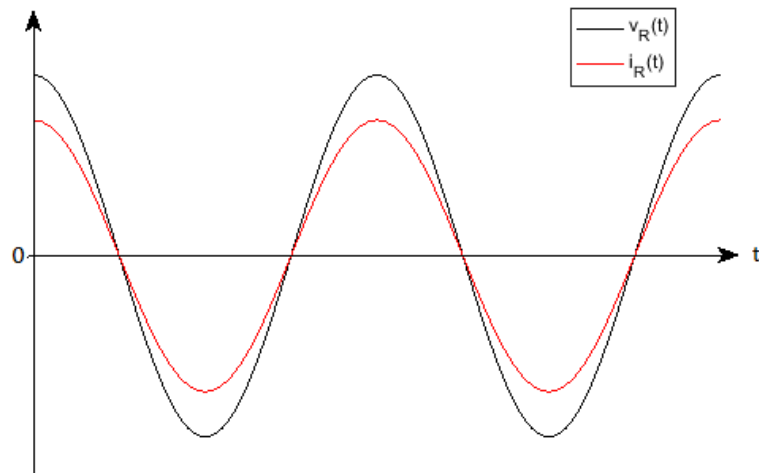
$$\underline{V} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \angle \varphi \cdot I \angle \beta = Z \cdot I \angle \varphi + \beta = V \angle \alpha \quad (\text{Ec 4.6.3.1.23})$$

La multiplicació de un escalar por un fasor se aplica a la relación tensión-corriente de un resistor.

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t) \Rightarrow \underline{V}_R = R \cdot \underline{I}_R \quad (\text{Ec 4.6.3.1.24})$$



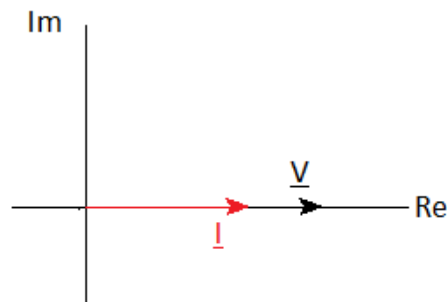
La representación en función del tiempo de la tensión y la corriente de un resistor, es la siguiente:



**Figura 4.6.3.1.1. Régimen permanente de un elemento puramente resistivo**

En la figura se puede ver que la tensión y la corriente están en fase, es decir, el desfase entre tensión y corriente es nulo.

El diagrama fasorial es el siguiente:

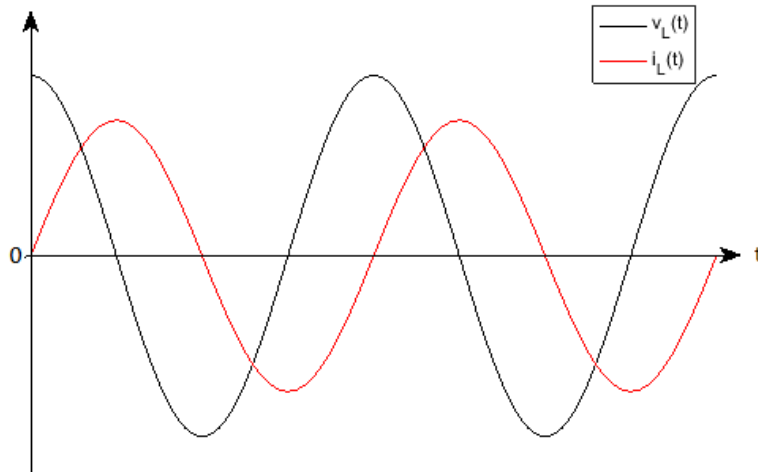


**Figura 4.6.3.1.2. Diagrama fasorial de un elemento puramente resistivo**

La derivación de fasores, se puede aplicar a la relación tensión-corriente de un inductor. En este caso, queda de la siguiente forma:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \underline{V}_L = j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_L \quad (\text{Ec 4.6.3.1.25})$$

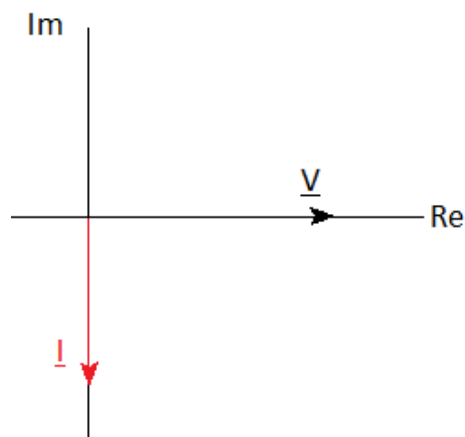
La representación en función del tiempo es la siguiente:



**Figura 4.6.3.1.3. Régimen permanente de un elemento puramente inductivo**

En la figura se puede ver el que el inductor retrasa la corriente, este desfase entre tensión y corriente es de  $90^\circ$ .

El diagrama fasorial es el siguiente:



**Figura 4.6.3.1.4. Diagrama fasorial de un elemento puramente inductivo**

La integración de fasores, se puede aplicar a la relación tensión-corriente de un condensador. En este caso, queda de la siguiente forma:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_c(t) dt \Rightarrow \underline{V}_c = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \cdot \underline{I}_c \quad (\text{Ec 4.6.3.1.26})$$

La representación en función del tiempo es la siguiente:

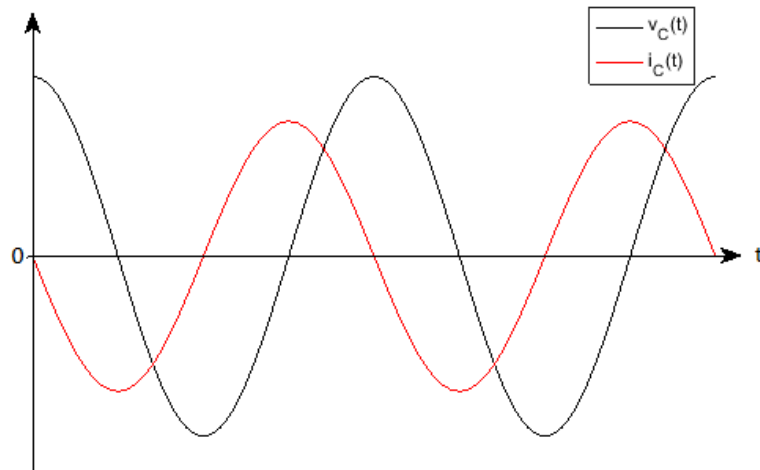


Figura 4.6.3.1.5. Régimen permanente de un elemento puramente capacitivo

En la figura se puede ver el que el condensador adelanta la corriente, este desfase entre tensión y corriente es de  $-90^\circ$ .

El diagrama fasorial es el siguiente:

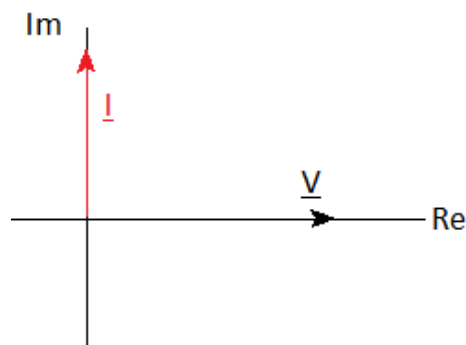


Figura 4.6.3.1.6. Diagrama fasorial de un elemento puramente capacitivo

Para llegar a este estado de régimen permanente, primero se pasa por un régimen transitorio, el cual está formado por dos componentes: la componente natural y la componente forzada.

Esto se va a ejemplificar con el siguiente circuito:

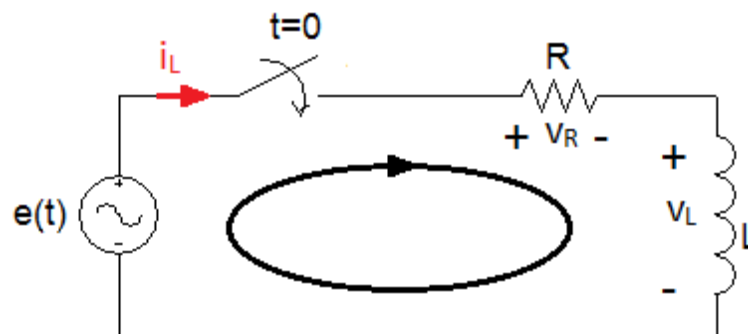


Figura 4.6.3.1.7. Circuito RL con interruptor

El interruptor se cerrará en el instante 0, con ello empezará a circular corriente por el circuito y sucederá un primer periodo transitorio antes de asumir el régimen permanente. Para ver este fenómeno se van a utilizar conceptos ya explicados.

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

$$e(t) = E_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad i_L(0) = I_0$$

Aplicamos la segunda ley de Kirchhoff se obtiene la expresión:

$$-e(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0$$

Substituyendo las tensiones:

$$E_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) = R \cdot i_L(t) + L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Dividiendo toda la ecuación por L:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot E_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

La solución será del tipo:

$$i_{Ln}(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, K \in \mathbb{R}$$

$$i_{Lf}(t) = \frac{E_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \alpha - \arctan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right)\right) =$$

$$= I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi)$$

$$i_L(t) = i_{Ln}(t) + i_{Lf}(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi), K \in \mathbb{R}$$

Teniendo presente que:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0) &= K + \frac{E}{R} \\ i_L(0) &= K + I_{\max} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \end{aligned} \right\} K = I_0 - I_{\max} \cdot \sin(\alpha - \varphi)$$

La solución queda así:

$$i_L(t) = \left( I_0 - I_{\max} \cdot \sin(\alpha - \varphi) \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi) \quad (\text{Ec 4.6.3.1.26})$$

Las anteriores funciones de corriente en el tiempo quedan graficadas de la siguiente forma:

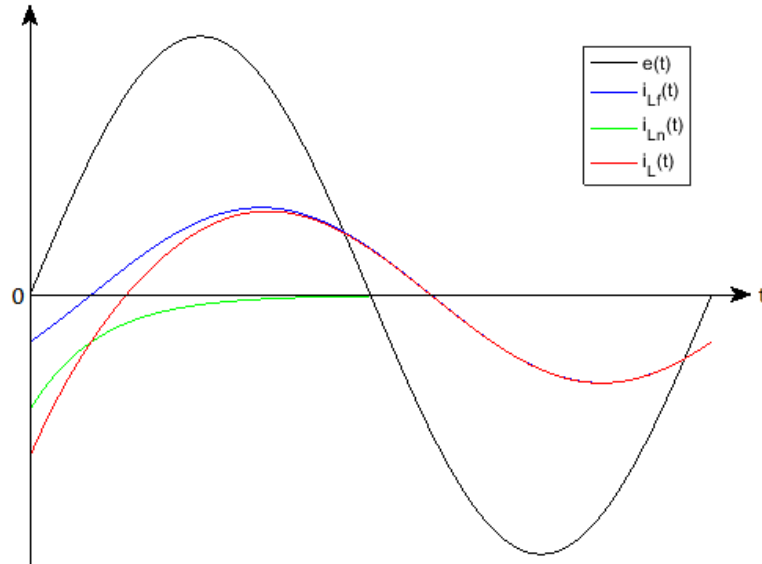


Figura 4.6.3.1.8. Régimen transitorio de las funciones de corriente en el circuito RL

Al hacer el límite de  $i_L(t)$  cuando el tiempo tiende a infinito, se comprueba que se llega al régimen permanente de  $i_L(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_L(t) = I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi) \quad (\text{Ec 4.6.3.1.27})$$

## 4.7. Cálculo de potencias y energías absorbidas por elementos

### 4.7.1. Fórmulas generales

El cálculo de potencias y energías absorbidas por un elemento activo o pasivo está definido por unas fórmulas generales, teniendo en cuenta lo siguiente:

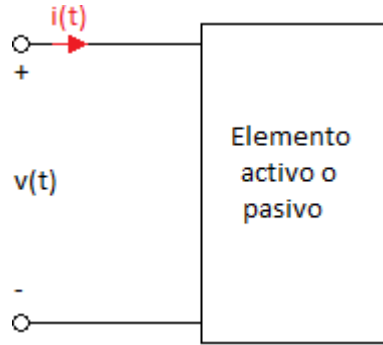


Figura 4.7.1.1. Esquema de un elemento activo o pasivo

Así, la **potencia instantánea absorbida por el elemento** se define:

$$p_{\text{abs}}(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{Ec 4.7.1.1})$$

Una vez definida la potencia instantánea absorbida, se puede definir la **energía instantánea absorbida por el elemento**:

$$w_{\text{abs}}(t) = \int_0^t p_{\text{abs}}(t) \cdot dt = \int_0^t v(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (\text{Ec 4.7.1.2})$$

Si se quiere calcular la potencia instantánea generada o la energía instantánea generada, tan solo hay que cambiar el signo a las fórmulas obtenidas anteriormente:

$$p_{\text{gen}}(t) = -p_{\text{abs}}(t) \quad w_{\text{gen}}(t) = -w_{\text{abs}}(t)$$

#### 4.7.2. Régimen permanente con alimentación continua

En régimen permanente con alimentación continua, la **potencia instantánea absorbida por el elemento** pasa a ser constante, ya que tanto la tensión como la corriente son constantes:

$$\begin{aligned} v(t) &= V & i(t) &= I \\ p_{\text{abs}}(t) &= v(t) \cdot i(t) = V \cdot I \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.7.2.1})$$

La fórmula de la **energía instantánea consumida por el elemento** también se ve simplificada por la misma razón:

$$w_{\text{abs}}(t) = \int_0^t p_{\text{abs}}(t) \cdot dt = \int_0^t V \cdot I \cdot dt = V \cdot I \cdot \int_0^t dt = V \cdot I \cdot [t]_0^t = V \cdot I \cdot t \quad (\text{Ec 4.7.2.2})$$

Para calcular la potencia instantánea generada o la energía instantánea generada, tan solo hay que cambiar el signo a las fórmulas obtenidas anteriormente:

$$p_{\text{gen}}(t) = -V \cdot I \quad w_{\text{gen}}(t) = -V \cdot I \cdot t$$

Todas las expresiones anteriores son función de la tensión y la corriente. En el caso de un resistor, aplicando la ley de Ohm, se pueden poner en función solo de la corriente o solo de la tensión:

$$\begin{aligned} p_{\text{abs}}(t) &= V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R} & p_{\text{gen}}(t) &= -V \cdot I = -R \cdot I^2 = -\frac{V^2}{R} \\ w_{\text{abs}}(t) &= V \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = \frac{V^2}{R} \cdot t & w_{\text{gen}}(t) &= -V \cdot I \cdot t = -R \cdot I^2 \cdot t = -\frac{V^2}{R} \cdot t \end{aligned}$$

#### 4.7.3. Régimen permanente con alimentación alterna

En primer lugar, se va a tratar la **potencia instantánea absorbida**, esta es la potencia absorbida por el elemento en un instante de tiempo.

Para hallar la fórmula de cálculo, se parte de las funciones de tensión y corriente en el tiempo.

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega \cdot t) & i(t) &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \\ p(t) &= v(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = \\ &= 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

Se obtiene:

$$2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + \cos(\varphi)$$

Y entonces, substituyendo, resulta:

$$p(t) = V \cdot I \cdot (\cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + \cos(\varphi)) = V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + V \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

$$\boxed{p(t) = V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + V \cdot I \cdot \cos(\varphi)} \quad (\text{Ec 4.7.3.1})$$

Siendo  $\varphi$  la diferencia entre el ángulo de la tensión y el ángulo de la corriente (diferencia medida de corriente a tensión), la cual se corresponde con el ángulo de la impedancia del elemento.

Cuando se habla de potencia, normalmente se hace referencia a la **potencia activa**, pero hay otros tres tipos más de potencia, estos otros tipos son la **potencia reactiva**, la **potencia compleja** y la **potencia aparente**.

La **potencia activa**,  $P$ , se define como el valor medio de la potencia instantánea absorbida en un periodo. Es la potencia asociada a la parte resistiva de un sistema. Esta se expresa en W en el SI.

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + V \cdot I \cdot \cos(\varphi)) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T V \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot V \cdot I \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega} \cdot [\sin(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)]_0^T + \frac{1}{T} \cdot V \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [t]_0^T = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot V \cdot I \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{2 \pi}{T}} \cdot \left[ \sin\left(2 \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot T - \varphi\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot 0 - \varphi\right) \right] + \frac{1}{T} \cdot V \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [T - 0] = \\
 &= 0 + V \cdot I \cdot \cos(\varphi) = V \cdot I \cdot \cos(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$P = V \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

(Ec 4.7.3.2)

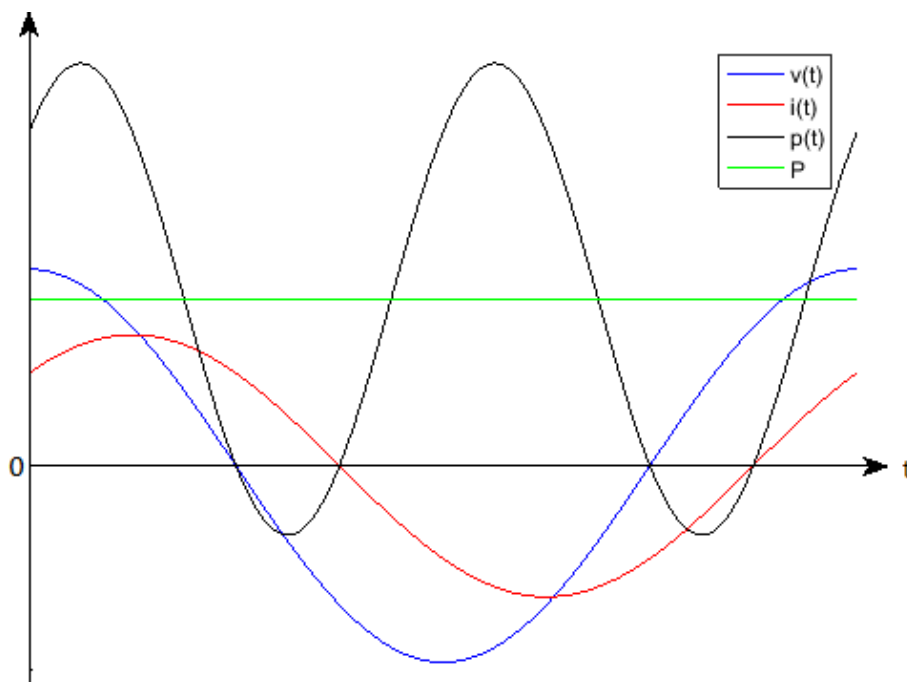


Figura 4.7.3.1. Potències instantània i mitjana en funció del temps

Si se vuelve a trabajar la ecuación Ec 4.7.3.1:

$$p(t) = V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) + V \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$



Sabiendo que:

$$\cos(a-b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$$

Se obtiene:

$$\cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi) = \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(\varphi)$$

Y entonces, substituyendo, resulta:

$$\begin{aligned} p(t) &= V \cdot I \cdot (\cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \sin(\varphi)) + V \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \\ &= V \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) + V \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) = \\ &= P \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) + Q \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \end{aligned}$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) + Q \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \quad (\text{Ec 4.7.3.3})$$

La cual es otra forma de cálculo de la **potencia instantánea absorbida**.

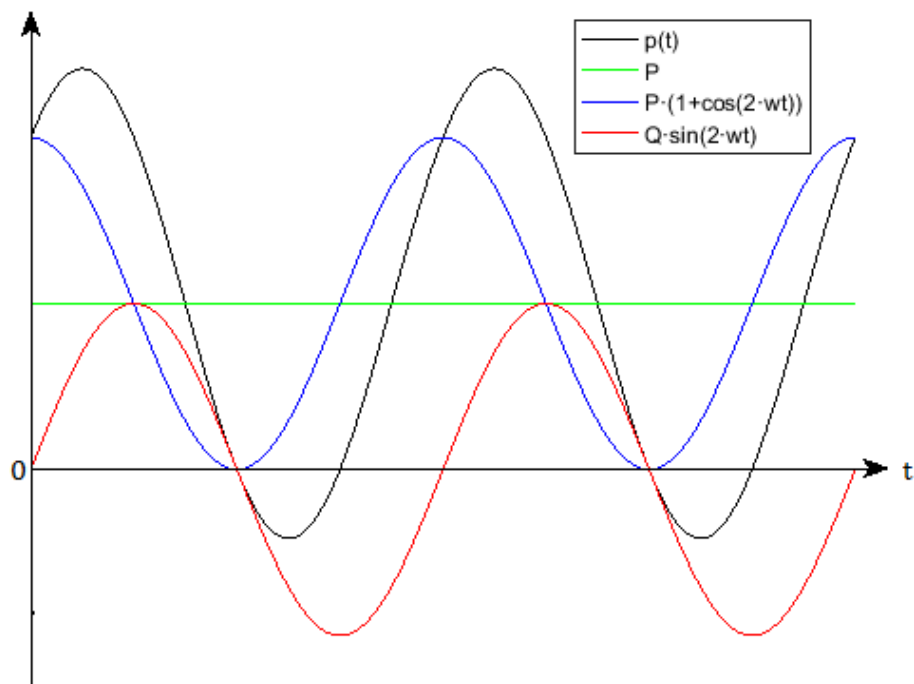


Figura 4.7.3.2. Potencias instantánea y media en función del tiempo

La **potencia compleja** se puede expresar como:

$$\underline{S} = \underline{V} \cdot \underline{I}^* = V \cdot I \angle \varphi = V \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot V \cdot I \cdot \sin(\varphi) = P + j \cdot Q = S \angle \varphi \quad (\text{Ec 4.7.3.4})$$

De la anterior expresión, se deducen otras expresiones:

$$P = S \cdot \cos(\varphi) \quad (\text{Ec 4.7.3.5})$$

$$Q = S \cdot \sin(\varphi) \quad (\text{Ec 4.7.3.6})$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (\text{Ec 4.7.3.7})$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) \quad (\text{Ec 4.7.3.8})$$

Donde  $P$  es la **potencia activa**, expresada en W en el SI,  $Q$  la **potencia reactiva**, expresada en var en el SI,  $S$  la **potencia aparente**, expresada en VA en el SI, y  $\varphi$  el ángulo de la impedancia.

El **factor de potencia** se puede expresar como  $fp$ .

$$fp = \cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad (\text{Ec 4.7.3.9})$$

Cuando el ángulo de la impedancia es positivo, el  $fp$  es inductivo, si el ángulo de la impedancia es negativo, el  $fp$  es capacitivo.

La **potencia aparente** es el módulo de la potencia compleja. En la siguiente figura se presenta el triángulo de potencias, donde aplicando leyes trigonométricas se pueden obtener relaciones entre las diferentes potencias:

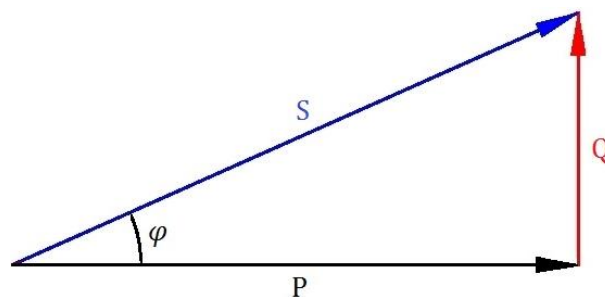


Figura 4.7.3.3. Triángulo de potencias

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (\text{Ec 4.7.3.10})$$

A continuación, se van a desglosar las diferentes potencias para cada elemento pasivo de los que se han estudiado.

El resistor tiene el siguiente comportamiento ( $\varphi = 0$ ):

$$v_R(t) = \sqrt{2} \cdot V_R \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{\sqrt{2} \cdot V_R \cdot \cos(\omega \cdot t)}{R} = \sqrt{2} \cdot I_R \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$p_R(t) = V_R \cdot I_R \cdot (1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) \quad P_R = V_R \cdot I_R$$

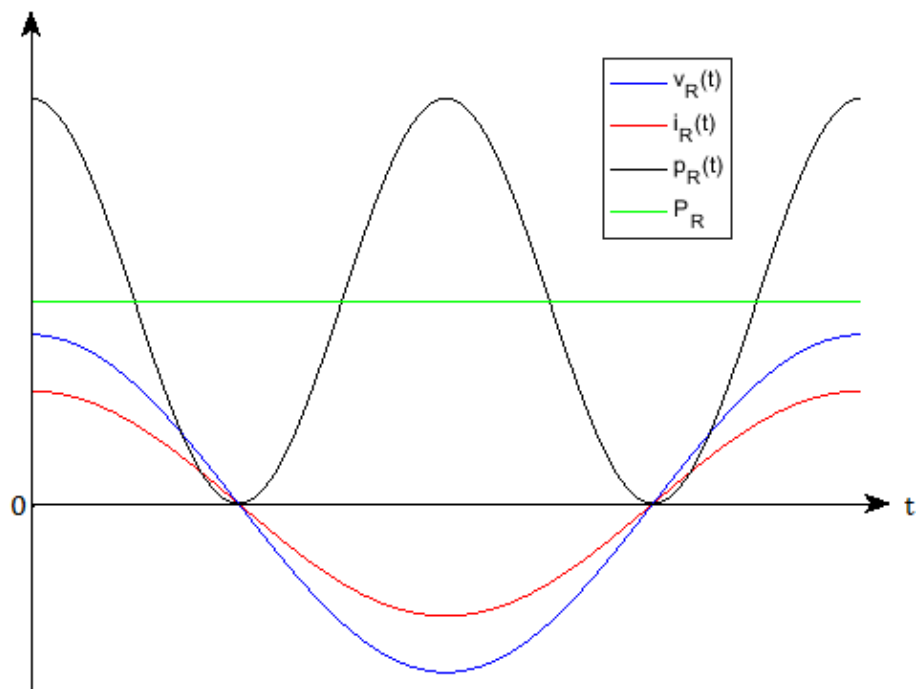


Figura 4.7.3.4. Potencias instantánea y media en un resistor en función del tiempo

A continuación, hay un resumen de las fórmulas para las diferentes potencias del resistor y sus unidades en el SI:

Potencia compleja	$\underline{S}_R = V_R \cdot I_R \angle 0$	$\underline{S}_R = R \cdot I_R^2 \angle 0$	$\underline{S}_R = \frac{V_R^2}{R} \angle 0$	VA
Potencia activa	$P_R = V_R \cdot I_R$	$P_R = R \cdot I_R^2$	$P_R = \frac{V_R^2}{R}$	W
Potencia reactiva	$Q_R = 0$	$Q_R = 0$	$Q_R = 0$	var
Potencia aparente	$S_R = V_R \cdot I_R$	$S_R = R \cdot I_R^2$	$S_R = \frac{V_R^2}{R}$	VA

La energía instantánea consumida por un resistor:

$$w_R(t) = V_R \cdot I_R \int_0^t (1 + \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) dt = V_R \cdot I_R \left[ t + \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} \right]_0^t =$$

$$V_R \cdot I_R \cdot \left[ t + \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} - 0 + \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot 0)}{2 \cdot \omega} \right] = V_R \cdot I_R \cdot t + \frac{V_R \cdot I_R}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$w_R(t) = V_R \cdot I_R \cdot t + \frac{V_R \cdot I_R}{2 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

(Ec 4.7.3.11)

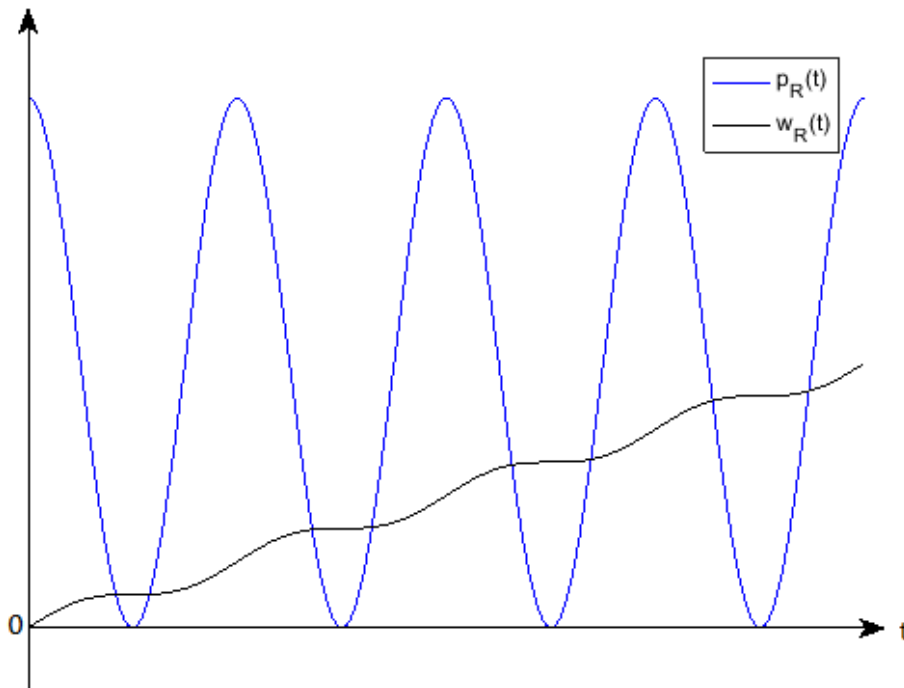


Figura 4.7.3.5. Energía instantánea consumida por un resistor en función del tiempo

El inductor tiene el siguiente comportamiento ( $\varphi = 90^\circ$ ):

$$v_L(t) = \sqrt{2} \cdot V_L \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int v_L(t) dt = \frac{\sqrt{2} \cdot V_L \cdot \cos(\omega \cdot t - 90^\circ)}{\omega \cdot L} = \sqrt{2} \cdot I_L \cdot \cos(\omega \cdot t - 90^\circ)$$

$$p_L(t) = V_L \cdot I_L \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \quad P_L = 0$$

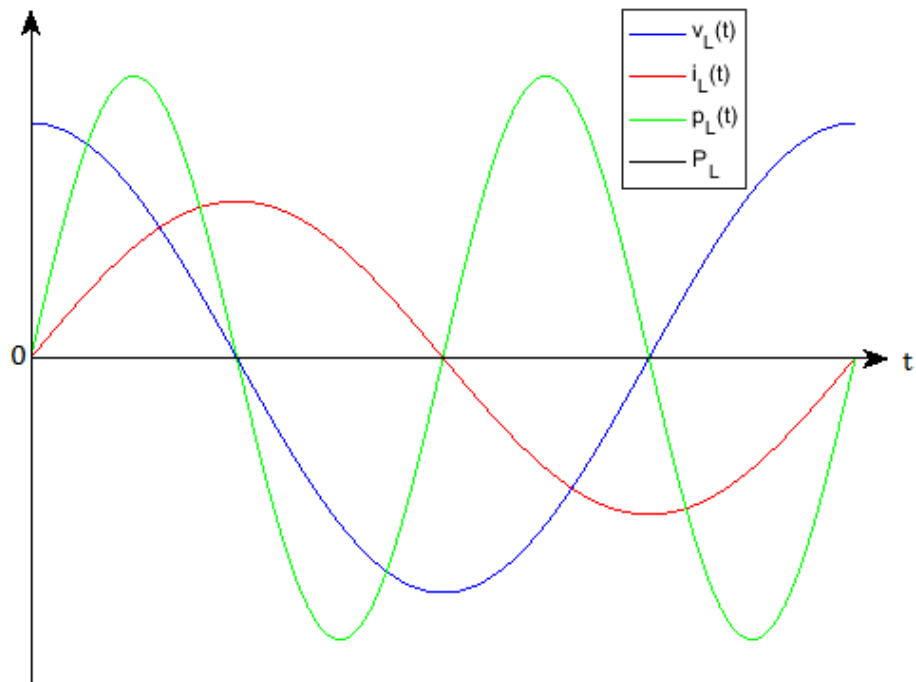


Figura 4.7.3.6. Potencias instantánea y media en un inductor en función del tiempo

A continuación, hay un resumen de las fórmulas para las diferentes potencias del inductor y sus unidades en el SI:

Potencia compleja	$\underline{S}_L = V_L \cdot I_L \angle 90^\circ$	$\underline{S}_L = \omega \cdot L \cdot I_L^2 \angle 90^\circ$	$\underline{S}_L = \frac{V_L^2}{\omega \cdot L} \angle 90^\circ$	VA
Potencia activa	$P_L = 0$	$P_L = 0$	$P_L = 0$	W
Potencia reactiva	$Q_L = V_L \cdot I_L$	$Q_L = \omega \cdot L \cdot I_L^2$	$Q_L = \frac{V_L^2}{\omega \cdot L}$	var
Potencia aparente	$S_L = V_L \cdot I_L$	$S_L = \omega \cdot L \cdot I_L^2$	$S_L = \frac{V_L^2}{\omega \cdot L}$	VA

La energía instantánea consumida por un inductor:

$$\begin{aligned}
 w_L(t) &= V_L \cdot I_L \cdot \int_0^t \sin(2 \cdot \omega \cdot t) dt = \omega \cdot L \cdot I_L^2 \cdot \int_0^t \sin(2 \cdot \omega \cdot t) dt = \\
 &= \omega \cdot L \cdot I_L^2 \cdot \left[ \frac{-\cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} \right]_0^t = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2 (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) \\
 \boxed{w_L(t) &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2 (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t))} \quad \text{(Ec 4.7.3.12)}
 \end{aligned}$$

La energía media consumida por un inductor:

$$\begin{aligned}
 W_L &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T w_L(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2 \cdot \int_0^T (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot L \cdot I_L^2 \cdot \left[ t - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} \right]_0^T = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot L \cdot I_L^2 \cdot \left[ T - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot T)}{2 \cdot \omega} - 0 + \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot 0)}{2 \cdot \omega} \right] = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2 \\
 \boxed{W_L &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_L^2} \quad \text{(Ec 4.7.3.13)}
 \end{aligned}$$

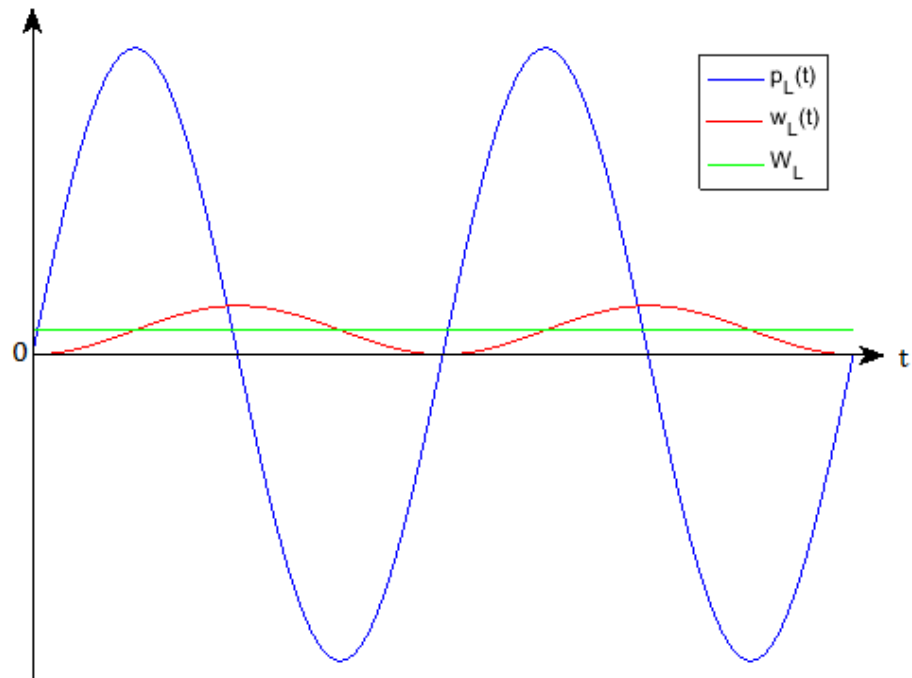


Figura 4.7.3.7. Energías instantánea y media consumidas por un inductor en función del tiempo

El condensador tiene el siguiente comportamiento ( $\varphi = -90^\circ$ ):

$$v_c(t) = \sqrt{2} \cdot V_c \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} = \sqrt{2} \cdot \omega \cdot C \cdot V_c \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) = \sqrt{2} \cdot I_c \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ)$$

$$p_c(t) = -V_c \cdot I_c \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \quad P_c = 0$$

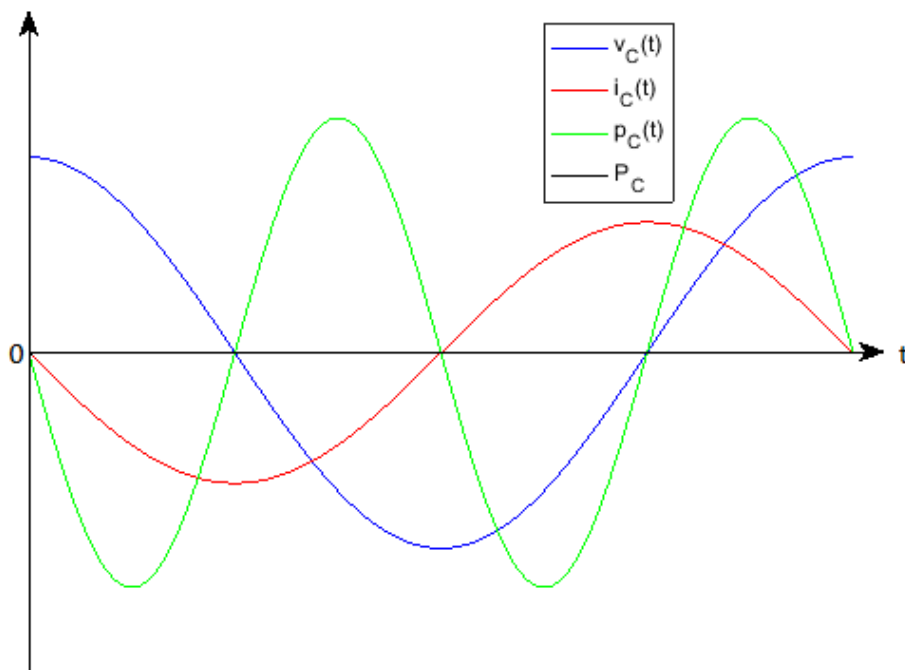


Figura 4.7.3.8. Potencias instantánea y media en un condensador en función del tiempo

A continuación, hay un resumen de las fórmulas para las diferentes potencias del condensador y sus unidades en el SI:

Potencia compleja	$\underline{S}_C = V_C \cdot I_C \angle -90^\circ$	$\underline{S}_C = \frac{I_C^2}{\omega \cdot C} \angle -90^\circ$	$\underline{S}_C = \omega \cdot C \cdot V_C^2 \angle -90^\circ$	VA
Potencia activa	$P_C = 0$	$P_C = 0$	$P_C = 0$	W
Potencia reactiva	$Q_C = -V_C \cdot I_C$	$Q_C = -\frac{I_C^2}{\omega \cdot C}$	$Q_C = -\omega \cdot C \cdot V_C^2$	var
Potencia aparente	$S_C = V_C \cdot I_C$	$S_C = \frac{I_C^2}{\omega \cdot C}$	$S_C = \omega \cdot C \cdot V_C^2$	VA



La energía instantánea consumida por un condensador:

$$\begin{aligned}
 w_c(t) &= -V_c \cdot I_c \cdot \int_0^t \sin(2 \cdot \omega \cdot t) dt = -\omega \cdot C \cdot V_c^2 \cdot \int_0^t \sin(2 \cdot \omega \cdot t) dt = \\
 &= -\omega \cdot C \cdot V_c^2 \cdot \left[ \frac{-\cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} \right]_0^t = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2 (1 - \cos(2 \cdot \omega \cdot t)) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2 (\cos(2 \cdot \omega \cdot t) - 1)
 \end{aligned}$$

$$w_c(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2 (\cos(2 \cdot \omega \cdot t) - 1)$$

**(Ec 4.7.3.14)**

La energía media consumida por un condensador:

$$\begin{aligned}
 W_c &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T w_c(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2 \cdot \int_0^T (\cos(2 \cdot \omega \cdot t) - 1) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot C \cdot V_c^2 \cdot \left[ \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot t)}{2 \cdot \omega} - t \right]_0^T = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot C \cdot V_c^2 \cdot \left[ \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot T)}{2 \cdot \omega} - T - \frac{\sin(2 \cdot \omega \cdot 0)}{2 \cdot \omega} + 0 \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2
 \end{aligned}$$

$$W_c = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot V_c^2$$

**(Ec 4.7.3.15)**

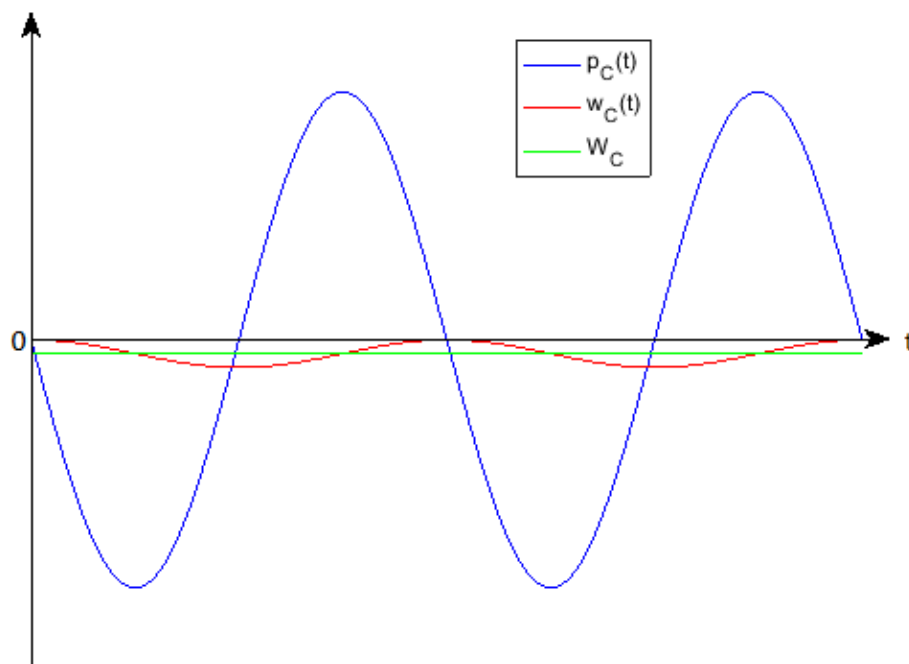


Figura 4.7.3.9. Energías instantánea y media consumidas por un condensador en función del tiempo

#### 4.7.3.1. Mejora del factor de potencia

Cuando la potencia compleja generada en un sistema y la potencia compleja absorbida en la carga son iguales, la fuente y la carga comparten el factor de potencia. El factor de potencia a veces es conveniente aumentarlo, para consumir menos potencia reactiva. Para aumentar el factor de potencia, hay que disminuir el ángulo  $\varphi$ . Para ello, hay que aumentar la potencia activa o disminuir la potencia reactiva. La opción más adecuada es disminuir la potencia reactiva, ya que así también se disminuye la potencia aparente. Aumentando la potencia activa, también aumentaríamos la potencia aparente, lo cual no es conveniente.

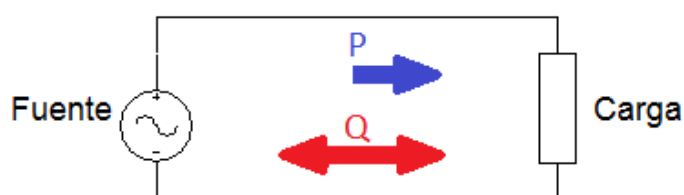


Figura 4.7.3.1.1. Flujo de potencias

Los elementos que afectan a la potencia reactiva son la bobina y el condensador. La bobina aumenta la potencia reactiva proporcionada por la fuente, el condensador la disminuye. Por lo tanto, la solución es instalar un condensador, el cual será conectado en paralelo a la carga para no afectar a la tensión que soporta dicha carga. La capacidad de dicho condensador es lo que interesa calcular.

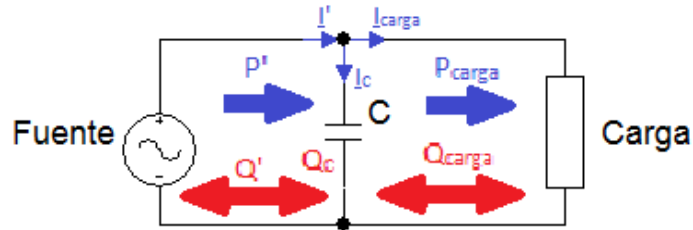


Figura 4.7.3.1.2. Flujo de potencias con condensador

Siendo  $\varphi'$  el ángulo asociado al factor de potencia objetivo, se cumple que:

$$P' = P = P_{carga}$$

$$Q' = Q_C + Q_{carga} = -\omega \cdot C \cdot V_C^2 + Q_{carga} = -\omega \cdot C \cdot V_C^2 + P_{carga} \cdot \tan(\varphi)$$

$$Q' = P_{carga} \cdot \tan(\varphi')$$

Igualando y despejando, resulta:

$$C = \frac{P \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega \cdot V_C^2} \quad (\text{Ec 4.7.3.1.1})$$

Siendo:

$$Q_C = P \cdot (\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) < 0 \quad (\text{Ec 4.7.3.1.2})$$

Los triángulos de potencias antes y después de realizar la compensación quedan de la siguiente forma:

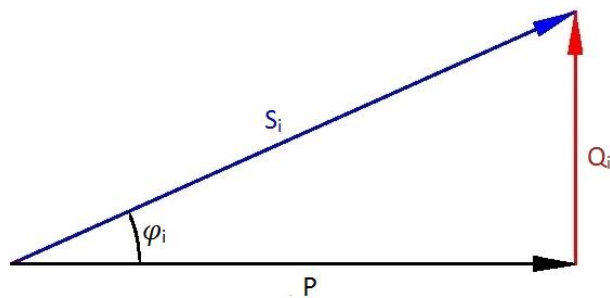


Figura 4.7.3.1.3. Triángulo de potencias antes de realizar la compensación

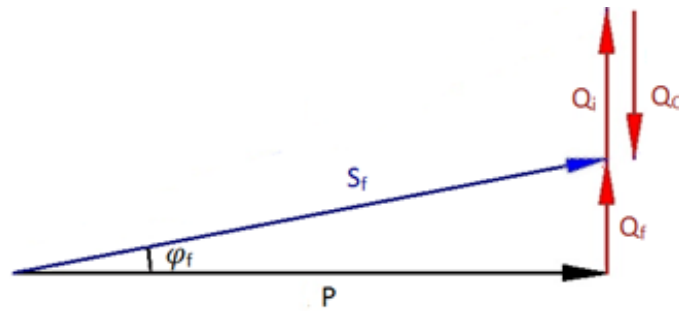


Figura 4.7.3.1.4. Triángulo de potencias una vez realizada la compensación

Otra forma de calcular la capacidad:

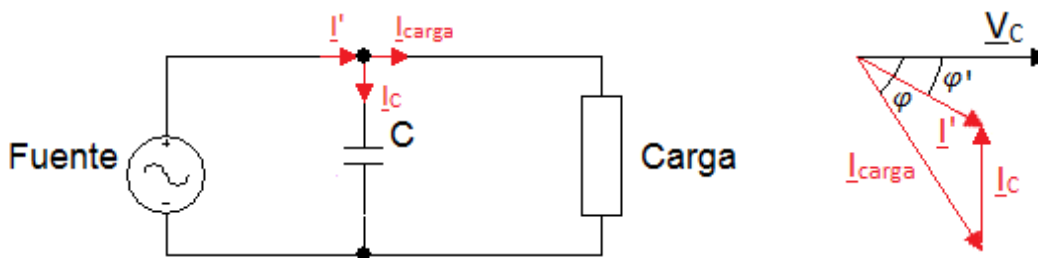


Figura 4.7.3.1.5. Intensidades y diagrama fasorial

$$I_C = I_{carga} \cdot \sin(\varphi) - I_{carga} \cdot \cos(\varphi) \cdot \tan(\varphi')$$

$$I_C = \omega \cdot C \cdot V_C$$

Igualando y despejando, resulta:

$$C = \frac{I_{carga} \cdot (\sin(\varphi) - \cos(\varphi) \cdot \tan(\varphi'))}{\omega \cdot V_C}$$

(Ec 4.7.3.1.3)

## 4.8. Linealidad. Teorema de superposición

Un circuito lineal es aquel que tiene una relación de proporcionalidad entre la entrada y la salida. Dicho circuito cumple dos propiedades: homogeneidad y aditividad. La propiedad de homogeneidad establece que, si la entrada es multiplicada por una constante, la salida se ve multiplicada por la misma constante. La propiedad de aditividad establece que, si la entrada es una suma de entradas, la salida es igual a la suma de las salidas asociadas a esas entradas aplicadas por separado.

Todo circuito lineal verifica el teorema de superposición. El teorema de superposición establece que, en un circuito lineal con más de una fuente, la tensión y corriente asociadas a una rama son iguales a la suma de tensiones y corrientes asociadas a dicha rama producidas por las diferentes fuentes actuando de forma individual. Para hacer los cálculos, las fuentes de tensión que no actúen se comportarán como cortocircuitos y las fuentes de corriente que no actúen se comportarán como circuitos abiertos.

#### 4.8.1. Régimen permanente con alimentación continua

A continuación se van a realizar dos ejemplos, un ejemplo de linealidad y un segundo ejemplo de superposición.

Se ejemplifica la propiedad de linealidad con el siguiente circuito lineal:

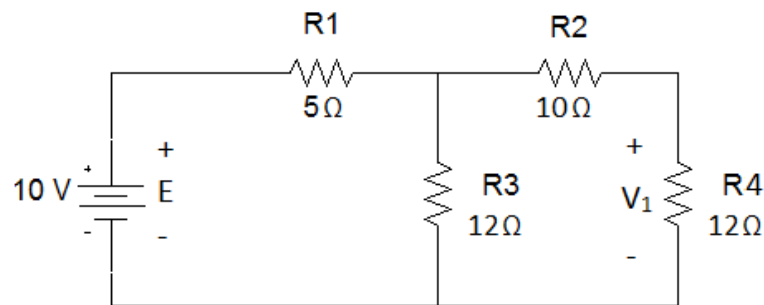


Figura 4.8.1.1. Circuito de ejemplo de linealidad

Se va a deducir la tensión  $V_1$  a partir de la proporcionalidad de la tensión  $V_1$  con la tensión  $E$  de la fuente. La tensión  $V_1$  se va a fijar en 1 V y se quiere hallar la  $E$  que la produce (constante de proporcionalidad).

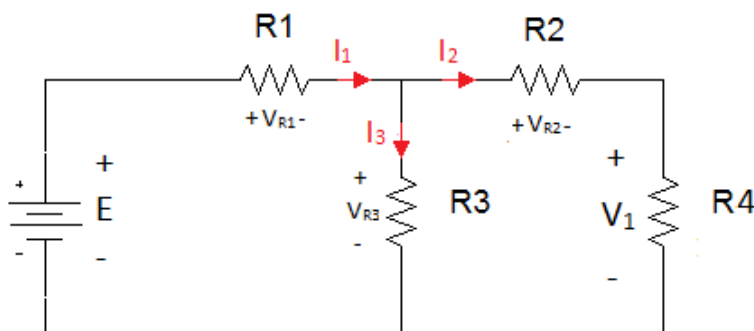


Figura 4.8.1.2. Circuito de ejemplo de linealidad con tensiones y corrientes

$$V_1 = 1 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{R_4} = 0,0833 \text{ A}$$

$$V_{R3} = (R_2 + R_4) \cdot I_2 = 1,8333 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = 0,1528 \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,2361 \text{ A}$$

$$E = R_1 \cdot I_1 + V_{R3} = 3,0138 \text{ V}$$

Sabiendo que en realidad  $E=10 \text{ V}$  y aplicando la proporcionalidad de la tensión de rama con la de la fuente, se va a hallar la  $V_1$  resultante:

$$V_1 = 10 \cdot \frac{1}{3,0138} = 3,318 \text{ V}$$

Se ejemplifica la propiedad de superposición con el siguiente circuito lineal:

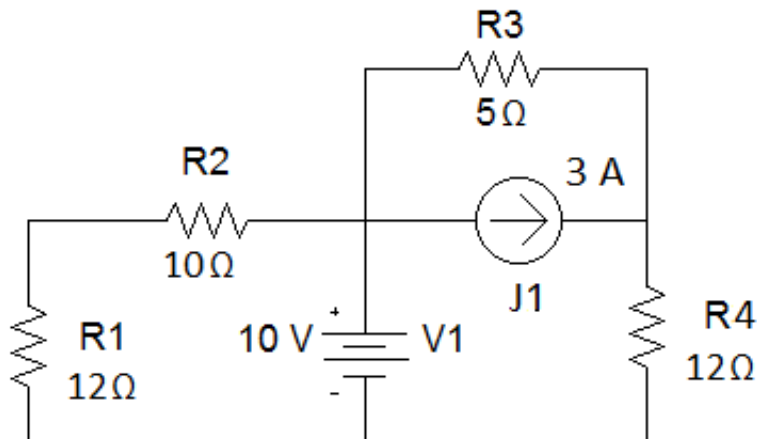


Figura 4.8.1.3. Circuito de ejemplo de superposición

Se va a calcular la potencia que consume el resistor  $R_3$  con el método de superposición. Como la potencia es una función cuadrática de la intensidad en la rama, se calcularán primero las intensidades que provocan en esa rama las fuentes actuando de forma individual para luego sumar dichas intensidades y poder calcular la potencia.

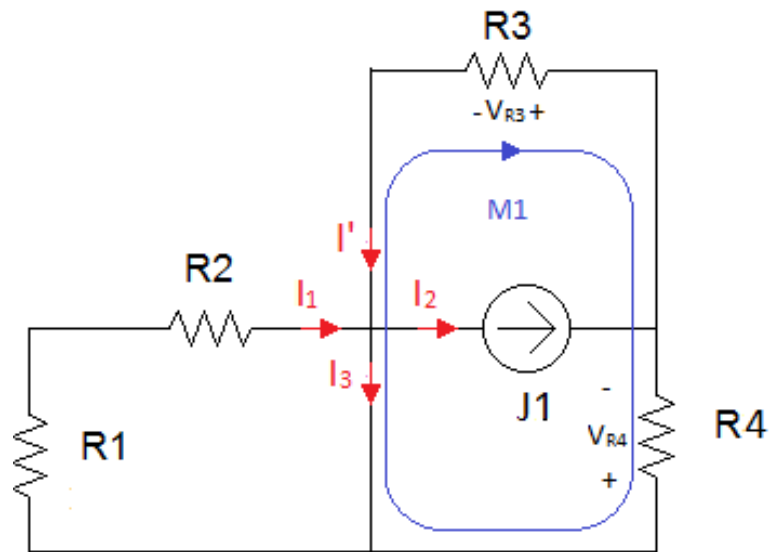


Figura 4.8.1.4. Circuito de ejemplo de superposición anulando la fuente de tensión

Los resistores R1 y R2 quedan cortocircuitados y por tanto no circulará corriente por ellos.

$$I_1 = 0$$

Si se plantean las leyes de Kirchhoff:

$$I' = I_2 + I_3$$

$$V_{R3} + V_{R4} = I' \cdot R_3 + I_3 \cdot R_4 = 0$$

Substituyendo y resolviendo la ecuación:

$$(I_2 + I_3) \cdot R_3 + I_3 \cdot R_4 = (3 + I_3) \cdot 5 + I_3 \cdot 12 = 0$$

$$I_3 = -0,8823 \text{ A}$$

Sabiendo:

$$I_2 = J_1$$

Se obtiene:

$$I' = 3 - 0,8823 = 2,1177 \text{ A}$$

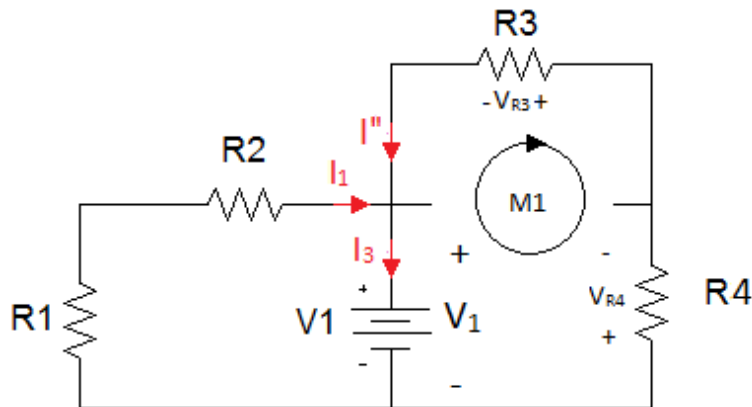


Figura 4.8.1.5. Circuito de ejemplo de superposición anulando la fuente de corriente

Si se plantean las leyes de Kirchhoff para la malla 1:

$$V_{R3} + V_{R4} + V_1 = 0$$

Substituyendo:

$$I'' \cdot R_3 + I'' \cdot R_4 = I'' \cdot (R_3 + R_4) = -V_1$$

$$I'' = -\frac{V_1}{R_3 + R_4} = -0,5882 \text{ A}$$

Una vez calculadas las intensidades, se puede calcular la potencia absorbida por el resistor R3:

$$P_{R3} = R_3 \cdot (I' + I'')^2 = 11,6963 \text{ W}$$

#### 4.8.2. Régimen permanente con alimentación alterna

A continuación se van a realizar dos ejemplos, un ejemplo de linealidad y un segundo ejemplo de superposición.

Se ejemplifica la propiedad de linealidad con el siguiente circuito lineal:

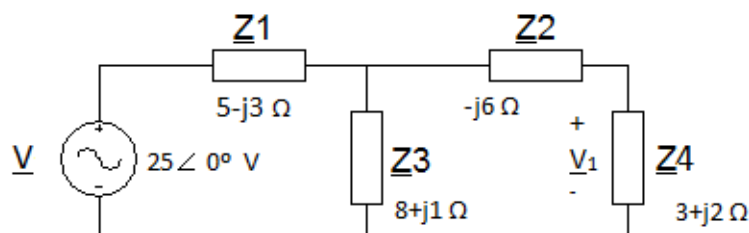


Figura 4.8.2.1. Circuito de ejemplo de linealidad



Se va a deducir la tensión  $\underline{V}_1$  a partir de la proporcionalidad de la tensión  $\underline{V}_1$  con la tensión  $\underline{V}$  de la fuente. La tensión  $\underline{V}_1$  se va a fijar en 1 V y se quiere hallar la  $\underline{V}$  que la produce (constante de proporcionalidad).

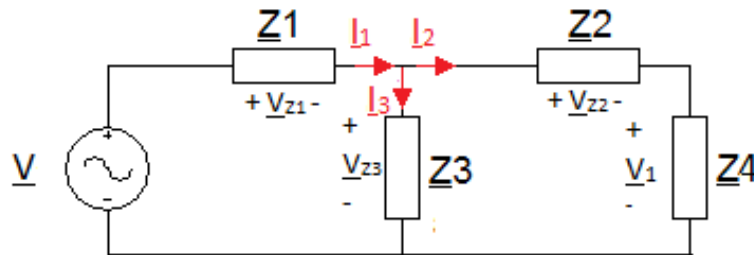


Figura 4.8.2.2. Circuito de ejemplo de linealidad con tensiones y corrientes

$$\underline{V}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{\underline{V}_1}{Z_4} = 0,2774 \angle -33,69^\circ \text{ A}$$

$$\underline{V}_{Z3} = (Z_2 + Z_4) \cdot I_2 = 1,3868 \angle -86,8202^\circ \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{\underline{V}_{Z3}}{Z_3} = 0,1720 \angle -93,9452^\circ \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,3922 \angle -56,0702^\circ \text{ A}$$

$$\underline{V} = Z_1 \cdot I_1 + \underline{V}_{Z3} = 3,6738 \angle -86,9533^\circ \text{ V}$$

Sabiendo que en realidad  $\underline{V} = 25 \angle 0^\circ \text{ V}$  y aplicando la proporcionalidad de la tensión de rama con la de la fuente, se va a hallar la  $\underline{V}_1$  resultante:

$$\underline{V}_1 = 25 \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{3,6738 \angle -86,9533^\circ} = 6,8049 \angle 86,9533^\circ \text{ V}$$

Se ejemplifica la propiedad de superposición con el siguiente circuito lineal:

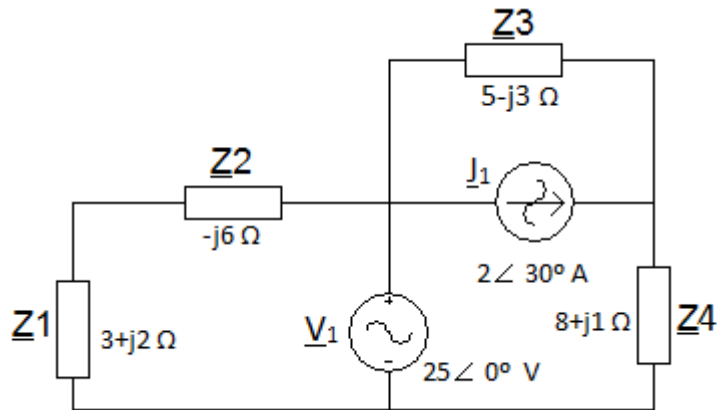


Figura 4.8.2.3. Circuito de ejemplo de superposición

Se va a calcular la intensidad que circula por la impedancia  $\underline{Z}_3$  con el método de superposición. Se calcularán primero las intensidades que provocan en esta impedancia las fuentes actuando de forma individual para luego sumar dichas intensidades y poder calcular la intensidad buscada.

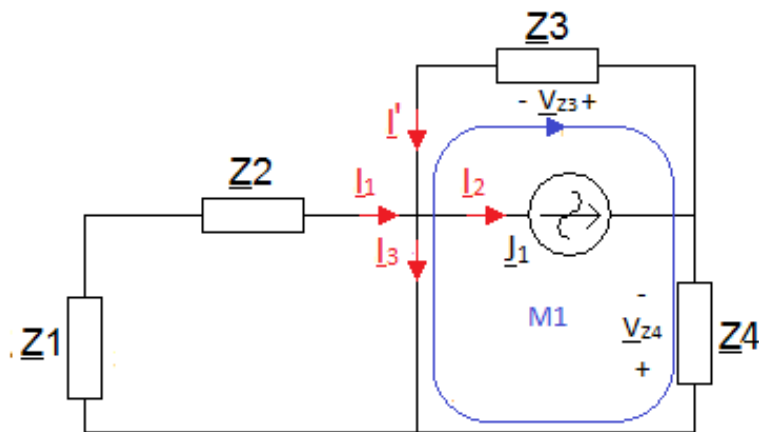


Figura 4.8.2.4. Circuito de ejemplo de superposición anulando la fuente de tensión

Las impedancias  $\underline{Z}_1$  y  $\underline{Z}_2$  quedan cortocircuitadas y por tanto no circulará corriente por ellas.

$$I_1 = 0$$

Si se plantean las leyes de Kirchhoff:

$$I' = I_2 + I_3$$

$$\frac{V_{Z3}}{Z_3} + \frac{V_{Z4}}{Z_4} = I' \cdot \frac{1}{Z_3} + I_3 \cdot \frac{1}{Z_4} = 0$$

Substituyendo y resolviendo la ecuación:

$$(I_2 + I_3) \cdot Z_3 + I_3 \cdot Z_4 = 0$$

$$I_3 = 0,8866 \angle -172,2176^\circ \text{ A}$$

Sabiendo:

$$I_2 = I_1$$

Se obtiene:

$$I' = I_1 - I_3 = 2,8407 \angle 23,2221^\circ \text{ A}$$

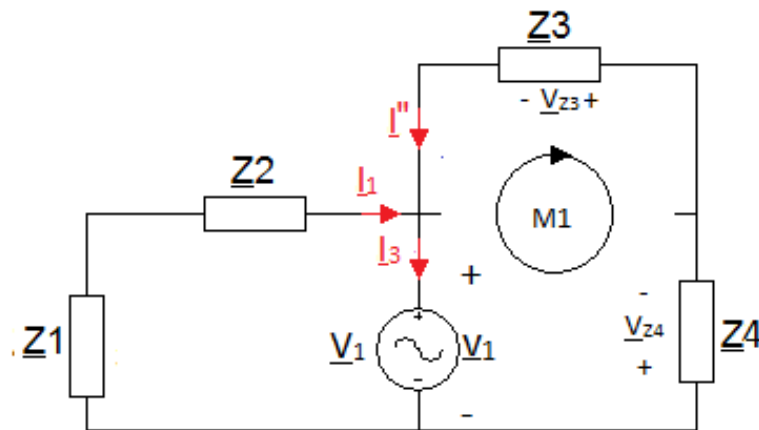


Figura 4.8.2.5. Circuito de ejemplo de superposición anulando la fuente de corriente

Si se plantean las leyes de Kirchhoff para la malla 1:

$$\frac{V}{Z_3} + \frac{V}{Z_4} + \frac{V}{Z_1} = 0$$

Substituyendo:

$$I'' \cdot Z_3 + I'' \cdot Z_4 = I'' \cdot (Z_3 + Z_4) = -V_1$$

$$I'' = -\frac{V_1}{Z_3 + Z_4} = 1,9007 \angle -171,2538^\circ \text{ A}$$

Una vez calculadas las intensidades, la intensidad que circula por la impedancia  $Z_3$  resulta:

$$I_{Z_3} = I' + I'' = 1,1074 \angle 48,6292^\circ \text{ A}$$

## 4.9. Circuitos equivalentes

Se dice que dos circuitos son equivalentes entre terminales si imponiendo una misma tensión entre los terminales, a través de los dos circuitos circula la misma corriente de uno a otro terminal, o si imponiendo una misma corriente circulando a través de los dos circuitos de uno a otro terminal, se obtiene la misma tensión entre los terminales.

#### 4.9.1. Régimen permanente con alimentación continua

##### 4.9.1.1. Asociación de resistores

Los resistores pueden estar conectados en serie o en paralelo. Decimos que están conectados en serie cuando tienen un terminal en común y uno está conectado a continuación del anterior. Por el contrario, decimos que dos o más resistores están conectados en paralelo cuando los resistores comparten terminales.

Para obtener la resistencia equivalente de varios resistores conectados en serie, hay que sumar los valores de resistencia de dichos resistores.

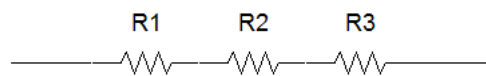


Figura 4.9.1.1.1. Resistores en serie

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^3 R_j = R_1 + R_2 + R_3 \quad (\text{Ec 4.9.1.1.1})$$

Para obtener la resistencia del resistor equivalente de varios resistores conectados en paralelo, hay que hacer el inverso de la suma de inversos de los valores de resistencia de dichos resistores.

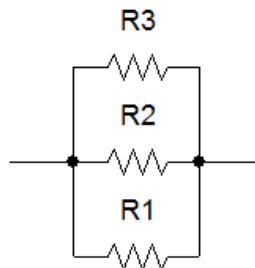


Figura 4.9.1.1.2. Resistores en paralelo

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{R_j}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (\text{Ec 4.9.1.1.2})$$

##### 4.9.1.2. Transformación estrella - triángulo

Las conexiones estrella y triángulo se pueden dar cuando como mínimo hay 3 resistores.

La conexión en estrella se da cuando los resistores están conectados de la siguiente forma:

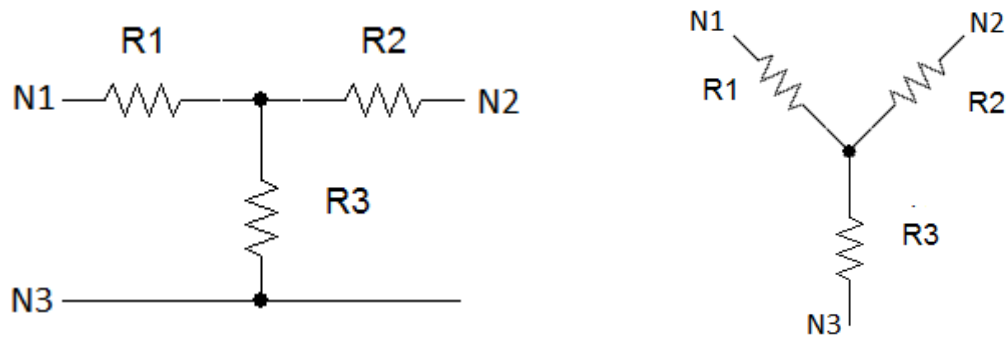


Figura 4.9.1.2.1. Resistores conectados en estrella

La conexión en triángulo se da cuando los resistores están conectados de la siguiente forma:

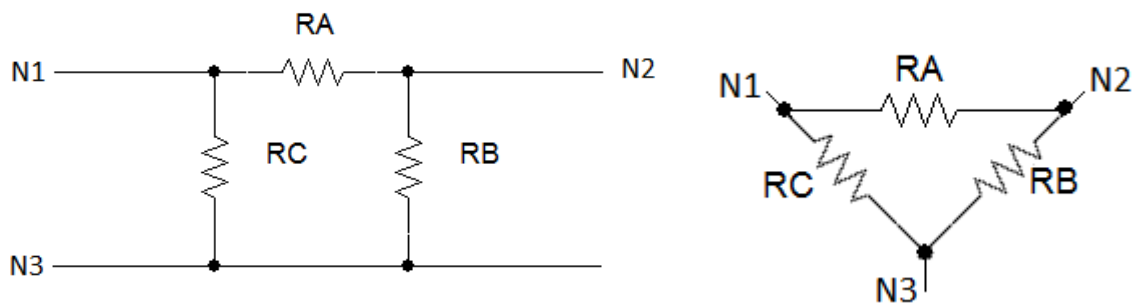


Figura 4.9.1.2.2. Resistores conectados en triángulo

Para transformar una conexión estrella a una conexión triángulo, hay que aplicar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 R_A &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3} \\
 R_B &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1} \\
 R_C &= \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2}
 \end{aligned}
 \quad (\text{Ec 4.9.1.2.1})$$

Para transformar una conexión triángulo a una conexión estrella, hay que aplicar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{R_A \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C} \\
 R_2 &= \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B + R_C}
 \end{aligned}
 \quad (\text{Ec 4.9.1.2.2})$$

$$R_3 = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

#### 4.9.1.3. Asociación de fuentes

En los circuitos puede haber más de una fuente que suministre energía al circuito. Tanto si son de tensión como de corriente, pueden estar conectadas en serie o en paralelo.

Las fuentes de tensión conectadas en serie, se pueden simplificar como una fuente de tensión equivalente de valor igual a la suma de los valores de tensión de las fuentes originales. La intensidad que circularía sería igual a la que circularía en el circuito original.

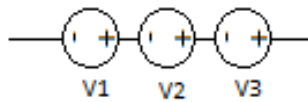


Figura 4.9.1.3.1. Fuentes de tensión conectadas en serie

Las fuentes de tensión solo pueden conectarse en paralelo si tienen el mismo valor de tensión y están conectadas con la polaridad en común. Se pueden simplificar como una sola fuente de tensión del mismo valor y circularía una intensidad igual a la suma de las intensidades de cada una de las fuentes de tensión originales.

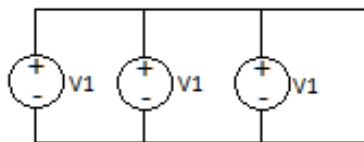


Figura 4.9.1.3.2. Fuentes de tensión conectadas en paralelo

Las fuentes de corriente solo pueden conectarse en serie si tienen el mismo valor de corriente y están conectadas con el mismo sentido. Se pueden simplificar como una sola fuente de corriente del mismo valor y tendría una tensión igual a la suma de las tensiones de cada una de las fuentes de corriente originales.

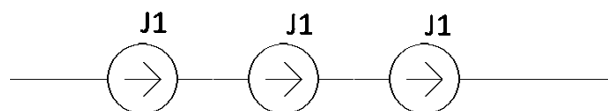


Figura 4.9.1.3.3. Fuentes de corriente conectadas en serie

Las fuentes de corriente conectadas en paralelo, se pueden simplificar como una fuente de corriente equivalente de valor igual a la suma de los valores de corriente de las fuentes originales. La tensión sería igual a la del circuito original.

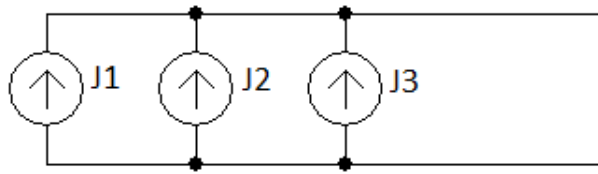


Figura 4.9.1.3.4. Fuentes de corriente conectadas en paralelo

#### 4.9.1.4. Transformación de fuentes

Las fuentes de tensión y de corriente se pueden transformar las unas en las otras, para facilitar la resolución de un circuito.

Una fuente de tensión de valor  $V$  en serie con un resistor de resistencia  $R$  se puede substituir por un resistor de resistencia  $R$  en paralelo con una fuente de corriente de valor:

$$J = \frac{V}{R}$$

Una fuente de corriente de valor  $J$  en paralelo con un resistor de resistencia  $R$  se puede substituir por un resistor de resistencia  $R$  en serie con una fuente de tensión de valor:

$$V = J \cdot R$$

Los circuitos siguientes son circuitos equivalentes, cumpliéndose lo explicado anteriormente:

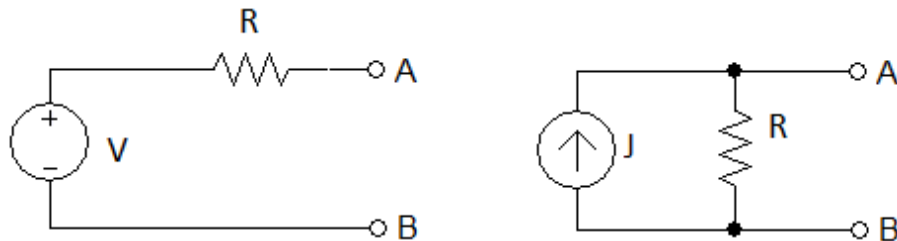


Figura 4.9.1.4.1. Transformación de fuentes

#### 4.9.1.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton

El teorema de Thévenin asegura que un circuito lineal con dos terminales de salida puede substituirse por una fuente de tensión de un valor denominado tensión de Thévenin en serie con un resistor de Thévenin. Esta fuente de tensión y resistor conectados en serie es un circuito equivalente al circuito original.

La tensión de Thévenin es la tensión que hay entre los terminales, estando estos terminales en circuito abierto.

La resistencia del resistor de Thévenin se calcula dejando los terminales a circuito abierto, cortocircuitando las fuentes de tensión y dejando a circuito abierto las fuentes de corriente. Una vez hecho esto, se calcula el valor de resistencia del resistor equivalente. Este valor de resistencia es el del resistor de Thévenin.

Esto se va a ejemplificar con el siguiente circuito:

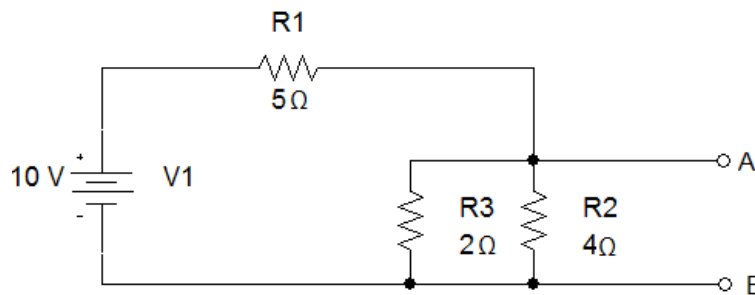


Figura 4.9.1.5.1. Circuito ejemplo con los terminales A y B en circuito abierto

Primero se calculará la resistencia del resistor de Thévenin:

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 1,33 \Omega$$

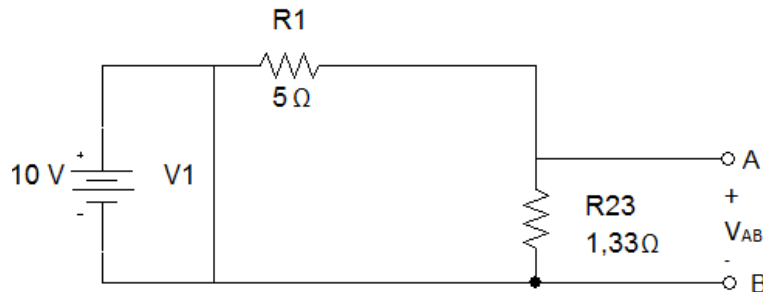


Figura 4.9.1.5.2. Circuito ejemplo con fuente cortocircuitada y con R23

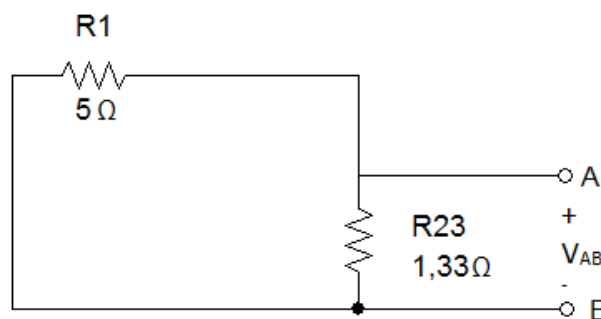


Figura 4.9.1.5.3. Circuito ejemplo sin fuente y con R23



$$R_{Th} = R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}} = 1,05 \Omega$$

Una vez calculada la resistencia del resistor de Thévenin, se pasará a calcular la tensión de Thévenin:

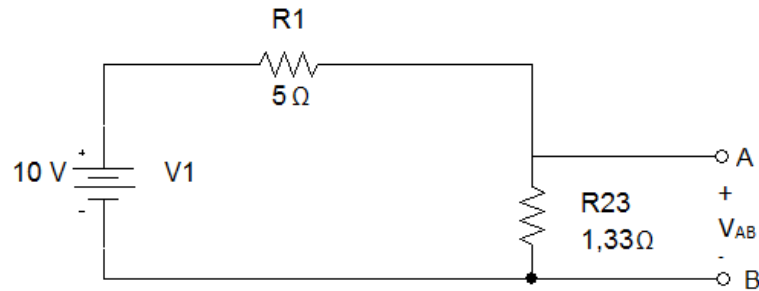


Figura 4.9.1.5.4. Circuito ejemplo con fuente y R23

Si se plantean las ecuaciones de Kirchhoff ya explicadas, obtenemos:

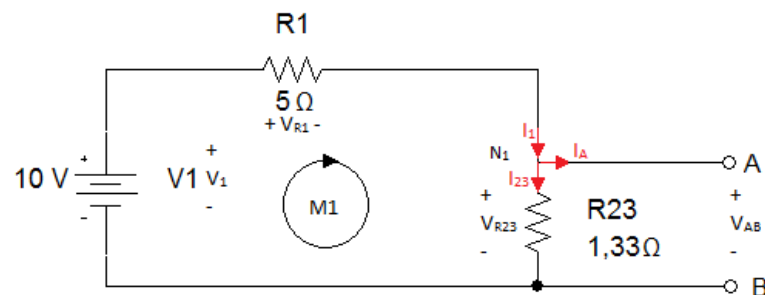


Figura 4.9.1.5.5. Circuito ejemplo con fuente, R23 y Kirchhoff

Planteando la ecuación de la malla 1 y la del nudo 1:

$$\begin{aligned} -V_1 + V_{R1} + V_{R23} &= 0 \\ I_1 = I_A + I_{23} &= 0 + I_{23} = I_{23} \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos:

$$V_{Th} = V_{AB} = V_{R23} = 2,10 \text{ V}$$

El circuito equivalente de Thévenin es el siguiente:

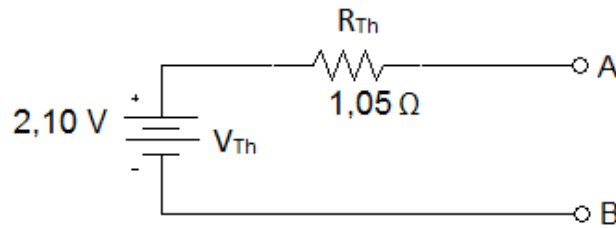


Figura 4.9.1.5.6. Circuito equivalente de Thévenin

El teorema de Norton asegura que un circuito lineal con dos terminales de salida puede substituirse por una fuente de corriente de un valor denominado intensidad de Norton en paralelo con un resistor de Norton. Esta fuente de corriente y resistor conectados en paralelo es un circuito equivalente al circuito original.

La intensidad de Norton es la corriente que circula si se cortocircuitan los dos terminales.

La resistencia del resistor de Norton se calcula dejando los terminales a circuito abierto, cortocircuitando las fuentes de tensión y dejando a circuito abierto las fuentes de corriente. Una vez hecho esto, se calcula el valor de resistencia del resistor equivalente. Este valor de resistencia es el del resistor de Norton.

La resistencia del resistor de Norton es igual a la resistencia del resistor de Thévenin. Por lo tanto, en circuitos activos, la tensión de Thévenin dividida entre la resistencia del resistor de Thévenin es igual a la intensidad de Norton.

Se va a ejemplificar el cálculo de la corriente de Norton con el mismo circuito que el ejemplo de Thévenin:

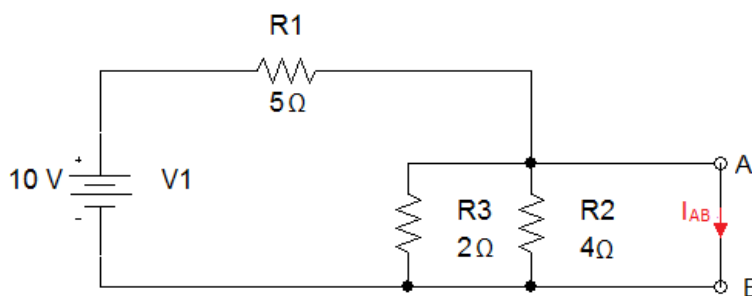


Figura 4.9.1.5.7. Circuito ejemplo con los terminales A y B cortocircuitados

Las resistencias R2 y R3 quedan cortocircuitadas y no circula corriente por ellas. Por lo tanto, el circuito queda:

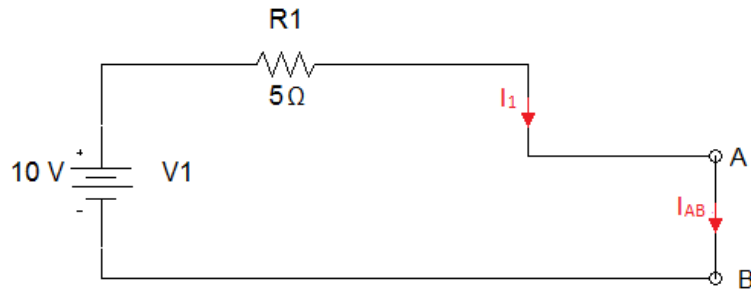


Figura 4.9.1.5.8. Circuito ejemplo con los terminales A y B cortocircuitados simplificado

$$I_N = I_{AB} = I_1 = \frac{V_1}{R_1} = 2,00 \text{ A}$$

Se comprueba que en un circuito activo se puede calcular la resistencia del resistor de Norton a partir de la tensión de Thévenin y la corriente de Norton:

$$R_N = \frac{V_{Th}}{I_N} = 1,05 \Omega$$

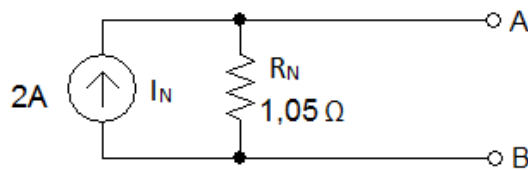


Figura 4.9.1.5.9. Circuito equivalente de Norton

#### 4.9.1.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia

Todo sistema tiene un punto de trabajo en el cual se obtiene la máxima transferencia de potencia a la carga. Esto sucede cuando la resistencia del resistor de carga es igual a la resistencia del resistor de Thévenin, y se demuestra de la siguiente forma:

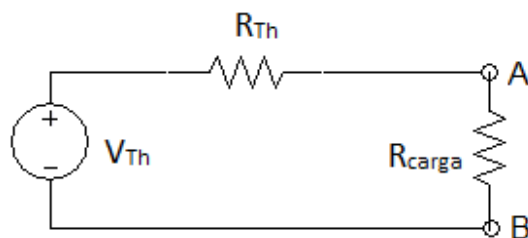


Figura 4.9.1.6.1. Circuito de partida para máxima transferencia de potencia

De este circuito, se puede escribir:

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_{carga}}$$

$$P_{R_{carga}} = R_{carga} \cdot I^2 = R_{carga} \cdot \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_{carga}} \right)^2 = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^2}$$

Para calcular la resistencia que da la potencia máxima hay que igualar la primera derivada a cero:

$$\frac{dP_{R_{carga}}}{dR_{carga}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{(R_{Th} + R_{carga})^2 - 2 \cdot (R_{Th} + R_{carga}) \cdot R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^4} =$$

$$= R_{Th}^2 + 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} + R_{carga}^2 - 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} - 2 \cdot R_{carga}^2 = 0$$

$$\boxed{R_{carga} = R_{Th}}$$

La potencia de transferencia máxima se puede calcular como:

$$P_{max} = P_{R_{carga} = R_{Th}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{Th}}{(2 \cdot R_{Th})^2} = \frac{1}{4} \cdot V_{Th} \cdot \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{1}{4} \cdot V_{Th} \cdot I_N \quad (\text{Ec 4.9.1.6.1})$$

## 4.9.2. Régimen permanente con alimentación alterna

### 4.9.2.1. Asociación de impedancias

Las impedancias pueden estar conectadas en serie o en paralelo. Decimos que están conectadas en serie cuando tienen un terminal en común y una está conectada a continuación de la anterior. Por el contrario, decimos que dos o más impedancias están conectadas en paralelo cuando las impedancias comparten terminales.

Para obtener la impedancia equivalente de varias impedancias conectadas en serie, hay que sumar los valores de dichas impedancias, sumando la parte real y la parte imaginaria por separado.

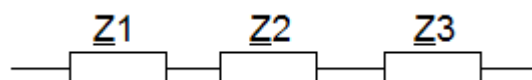


Figura 4.9.2.1.1. Impedancias en serie

$$Z_{eq} = \sum_{j=1}^3 Z_j = Z_1 + Z_2 + Z_3 \quad (\text{Ec 4.9.2.1.1})$$

Para obtener la impedancia equivalente de varias impedancias conectadas en paralelo, hay que hacer el inverso de la suma de inversos de los valores de dichas impedancias.

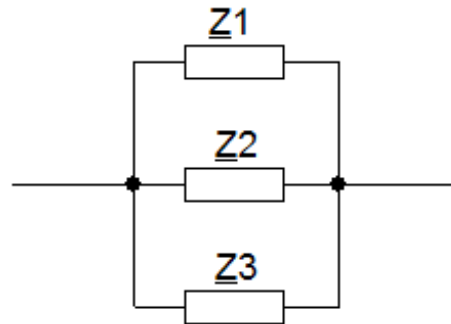


Figura 4.9.2.1.2. Impedancias en paralelo

$$Z_{eq} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{Z_j}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \quad (\text{Ec 4.9.2.1.2})$$

#### 4.9.2.2. Transformación estrella – triángulo

Las conexiones estrella y triángulo se pueden dar cuando como mínimo hay 3 impedancias.

La conexión en estrella se da cuando las impedancias están conectadas de la siguiente forma:

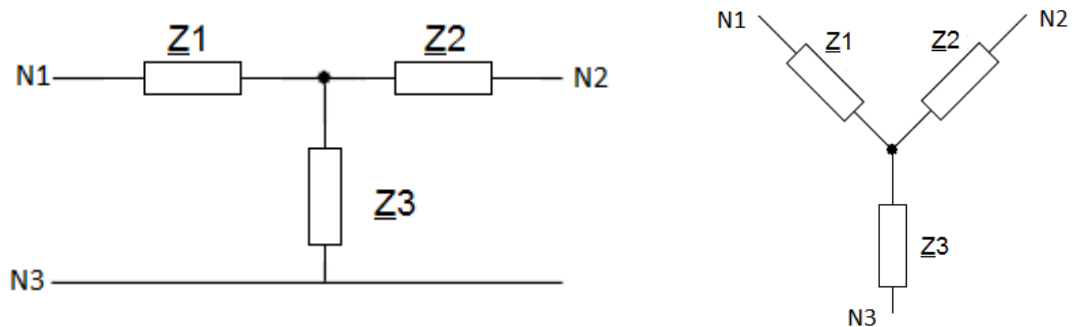


Figura 4.9.2.2.1. Impedancias conectadas en estrella

La conexión en triángulo se da cuando las impedancias están conectadas de la siguiente forma:

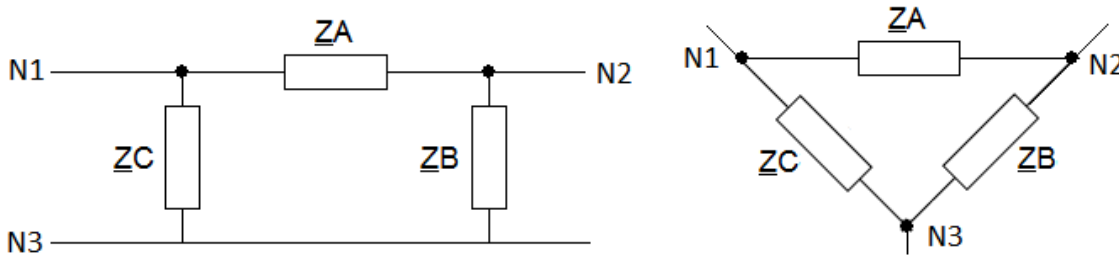


Figura 4.9.2.2.2. Impedancias conectadas en triángulo

Para transformar una conexión estrella a una conexión triángulo, hay que aplicar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_3} \\ Z_B &= \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_1} \\ Z_C &= \frac{Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_3 \cdot Z_1}{Z_2} \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.9.2.2.1})$$

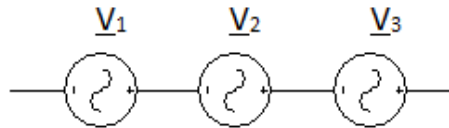
Para transformar una conexión triángulo a una conexión estrella, hay que aplicar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_2 &= \frac{Z_A \cdot Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \\ Z_3 &= \frac{Z_B \cdot Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \end{aligned} \quad (\text{Ec 4.9.2.2.2})$$

#### 4.9.2.3. Asociación de fuentes

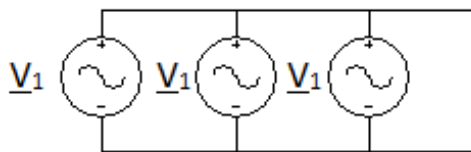
En los circuitos puede haber más de una fuente que suministre energía al circuito. Tanto si son de tensión como de corriente, pueden estar conectadas en serie o en paralelo.

Las fuentes de tensión conectadas en serie, a misma frecuencia, se pueden simplificar como una fuente de tensión equivalente de valor igual a la suma de los fasores de tensión de las fuentes originales. La intensidad que circularía sería igual a la que circularía en el circuito original.



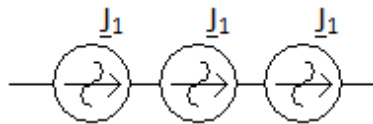
**Figura 4.9.2.3.1. Fuentes de tensión conectadas en serie**

Las fuentes de tensión, a misma frecuencia, solo pueden conectarse en paralelo cuando tienen el mismo valor de tensión, tanto en módulo como en argumento, y están conectadas con la polaridad en común. Se pueden simplificar como una sola fuente de tensión del mismo valor y circulando una intensidad igual a la suma de las intensidades de cada una de las fuentes de tensión originales.



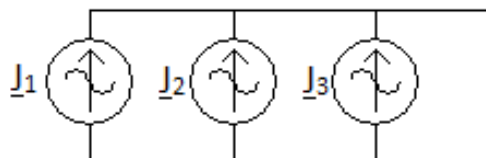
**Figura 4.9.2.3.2. Fuentes de tensión conectadas en paralelo**

Las fuentes de corriente, a misma frecuencia, solo pueden conectarse en serie cuando tienen el mismo valor de corriente, tanto en módulo como en argumento, y están conectadas con el mismo sentido. Se pueden simplificar como una sola fuente de corriente del mismo valor y teniendo una tensión igual a la suma de las tensiones de cada una de las fuentes de corriente originales.



**Figura 4.9.2.3.3. Fuentes de corriente conectadas en serie**

Las fuentes de corriente conectadas en paralelo, a misma frecuencia, se pueden simplificar como una fuente de corriente equivalente de valor igual a la suma de los fasores de corriente de las fuentes originales. La tensión sería del mismo valor que la del circuito original.



**Figura 4.9.2.3.4. Fuentes de corriente conectadas en paralelo**

#### 4.9.2.4. Transformación de fuentes

Las fuentes de tensión y de corriente se pueden transformar las unas en las otras, para facilitar la resolución de un circuito.

Una fuente de tensión de valor  $\underline{V}$  en serie con una impedancia de valor  $\underline{Z}$  se puede substituir por una impedancia de valor  $\underline{Z}$  en paralelo con una fuente de corriente de valor:

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}}$$

Una fuente de corriente de valor  $\underline{I}$  en paralelo con una impedancia de valor  $\underline{Z}$  se puede substituir por una impedancia de valor  $\underline{Z}$  en serie con una fuente de tensión de valor:

$$\underline{V} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$$

Los circuitos siguientes son circuitos equivalentes, cumpliéndose lo explicado anteriormente:

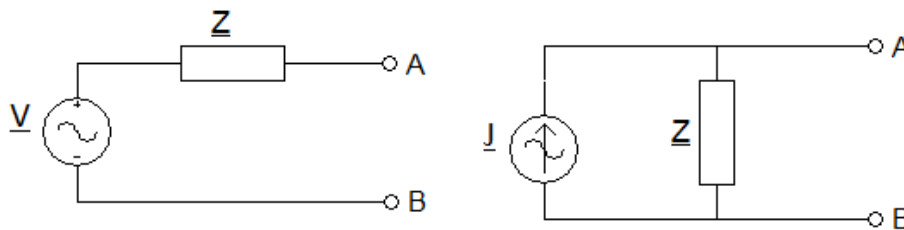


Figura 4.9.2.4.1. Transformación de fuentes

#### 4.9.2.5. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton

El teorema de Thévenin asegura que un circuito lineal con dos terminales de salida puede substituirse por una fuente de tensión de un valor denominado tensión de Thévenin en serie con una impedancia de Thévenin. Esta fuente de tensión e impedancia conectadas en serie es un circuito equivalente al circuito original.

La tensión de Thévenin es la tensión que hay entre los terminales, estando estos terminales en circuito abierto.

La impedancia de Thévenin se calcula dejando los terminales a circuito abierto, cortocircuitando las fuentes de tensión y dejando a circuito abierto las fuentes de corriente. Una vez hecho esto, se calcula el valor de impedancia equivalente. Este valor es la impedancia de Thévenin.

Esto se va a ejemplificar con el siguiente circuito:



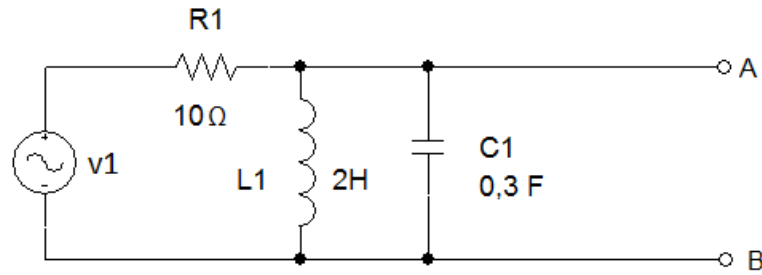


Figura 4.9.2.5.1. Circuito ejemplo con los terminales A y B en circuito abierto

$$v_1 = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(25 \cdot t) \text{ V}$$

Hay que transformar el circuito del dominio temporal al dominio  $j\omega$ :

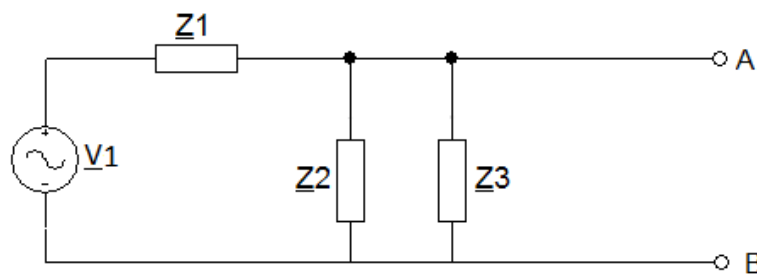


Figura 4.9.2.5.2. Circuito ejemplo en dominio  $j\omega$  con los terminales A y B en circuito abierto

$$Z_1 = R_1 = 10 \Omega \quad Z_2 = j \cdot \omega \cdot L1 = j \cdot 25 \cdot 2 = j \cdot 50 \Omega \quad Z_3 = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C1} = \frac{1}{j \cdot 25 \cdot 0,3} = -j \cdot 0,1333 \Omega$$

$$\underline{V}_1 = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Primero se calculará la impedancia de Thévenin:

$$Z_{23} = \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = -j \cdot 0,1337 \Omega$$

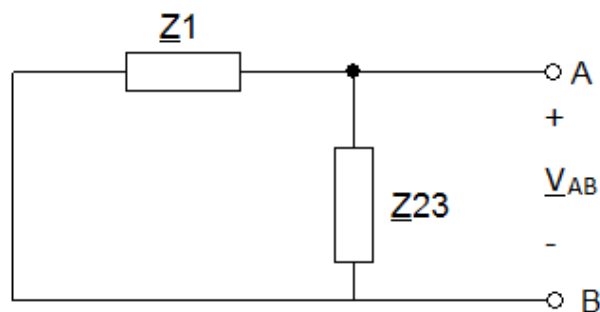


Figura 4.9.2.5.3. Circuito ejemplo sin fuente y con  $Z_{23}$

$$Z_{Th} = Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_{23}}} = 0,0018 - j \cdot 0,1337 \Omega$$

Una vez calculada la impedancia de Thévenin, se pasará a calcular la tensión de Thévenin:

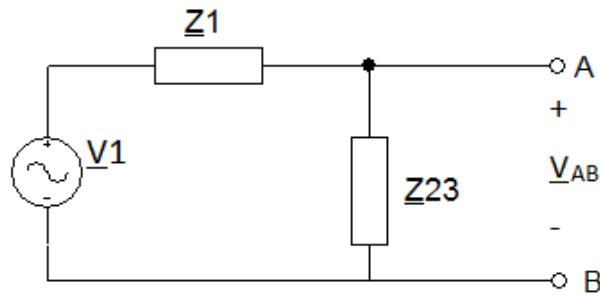


Figura 4.9.2.5.4. Circuito ejemplo con fuente y  $Z_{23}$

Si se plantean las ecuaciones de Kirchhoff ya explicadas, obtenemos:

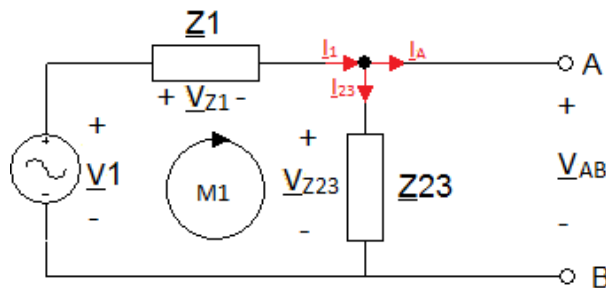


Figura 4.9.2.5.5. Circuito ejemplo con fuente,  $Z_{23}$  y Kirchhoff

Planteando la ecuación de la malla 1 y la del nudo 1:

$$\begin{aligned}
 -V_1 + V_{Z1} + V_{Z23} &= 0 \\
 I_1 = I_A + I_{23} &= 0 + I_{23} = I_{23}
 \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos:

$$V_{Th} = V_{AB} = V_{Z23} = 0,2673 \angle -89,2340^\circ \text{ V}$$

El circuito equivalente de Thévenin es el siguiente:

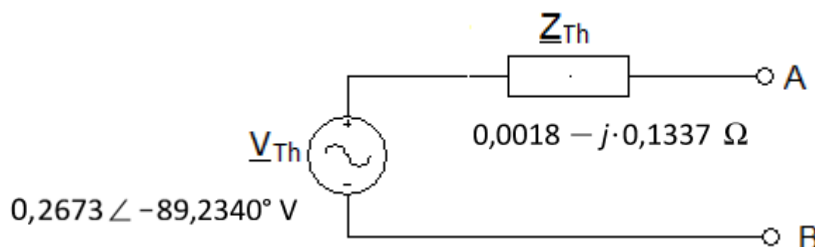


Figura 4.9.2.5.6. Circuito equivalente de Thévenin

El teorema de Norton asegura que un circuito lineal con dos terminales de salida puede substituirse por una fuente de corriente de un valor denominado intensidad de Norton en paralelo con una impedancia de Norton. Esta fuente de corriente e impedancia conectadas en paralelo es un circuito equivalente al circuito original.

La intensidad de Norton es la corriente que circula si se cortocircuitan los dos terminales.

La impedancia de Norton se calcula dejando los terminales a circuito abierto, cortocircuitando las fuentes de tensión y dejando a circuito abierto las fuentes de corriente. Una vez hecho esto, se calcula el valor de la impedancia equivalente. Este valor es el de la impedancia de Norton.

La impedancia de Norton es igual a la impedancia de Thévenin. Por lo tanto, en circuitos activos, la tensión de Thévenin dividida entre la impedancia de Thévenin es igual a la intensidad de Norton.

Se va a ejemplificar el cálculo de la corriente de Norton con el mismo circuito que el ejemplo de Thévenin:

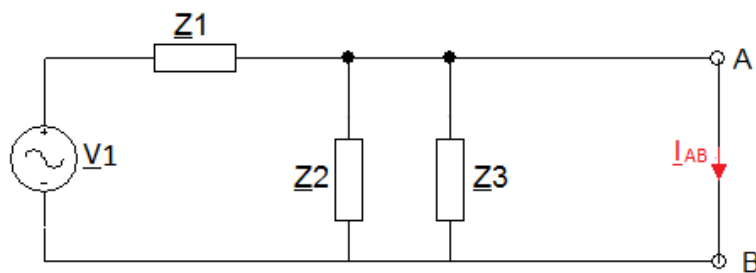


Figura 4.9.2.5.7. Circuito ejemplo con los terminales A y B cortocircuitados

Las impedancias  $Z_2$  y  $Z_3$  quedan cortocircuitadas y no circula corriente por ellas. Por lo tanto, el circuito queda:

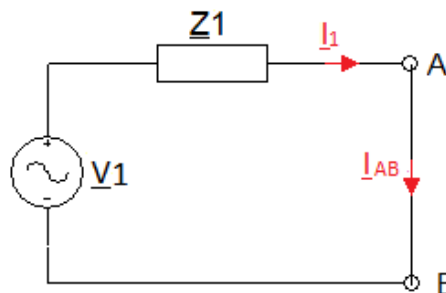


Figura 4.9.2.5.8. Circuito ejemplo con los terminales A y B cortocircuitados simplificado

$$I_N = I_{AB} = I_1 = \frac{V_1}{Z_1} = 2,00 \text{ A}$$

Se comprueba que en un circuito activo se puede calcular la impedancia de Norton a partir de la tensión de Thévenin y la corriente de Norton:

$$Z_N = \frac{V_{Th}}{I_N} = 0,0018 - j \cdot 0,1337 \Omega$$

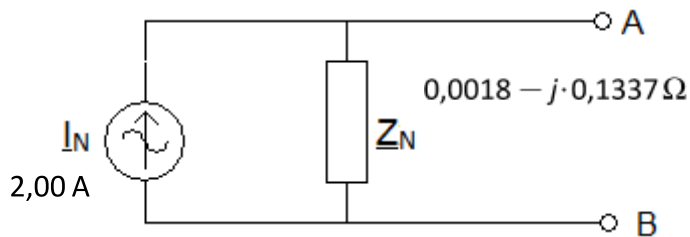


Figura 4.9.2.5.9. Circuito equivalente de Norton

#### 4.9.2.6. Teorema de la máxima transferencia de potencia (activa)

Todo sistema tiene un punto de trabajo en el cual se obtiene la máxima transferencia de potencia (activa) a la carga. Esto sucede cuando la fuente solo suministra potencia activa, es decir, no suministra potencia reactiva.

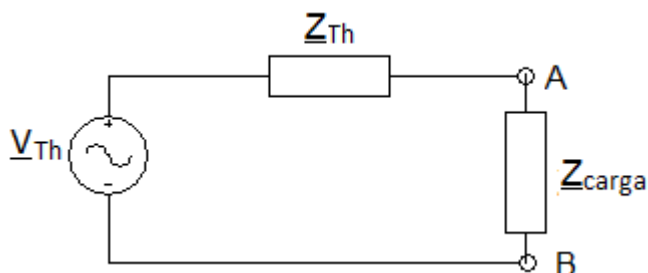


Figura 4.9.2.6.1. Circuito de partida para máxima transferencia de potencia (activa)

De este circuito, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{V_{Th}}{|Z_{Th} + Z_{carga}|} \\
 P_{R_{carga}} &= R_{carga} \cdot I^2 = \\
 &= R_{carga} \cdot \left( \frac{V_{Th}}{|Z_{Th} + Z_{carga}|} \right)^2 = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^2 + (X_{Th} + X_{carga})^2}
 \end{aligned}$$

La potencia reactiva suministrada por la fuente debe ser nula. Por lo tanto, se deduce:

$$Q = 0 \Rightarrow X_{Th} + X_{carga} = 0 \Rightarrow \boxed{X_{carga} = -X_{Th}}$$

$$P_{R_{carga}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^2}$$

Una vez determinada la reactancia, para calcular la resistencia que da la potencia (activa) máxima hay que igualar la primera derivada a cero:

$$\frac{dP_{R_{carga}}}{dR_{carga}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{(R_{Th} + R_{carga})^2 - 2 \cdot (R_{Th} + R_{carga}) \cdot R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^4} =$$

$$R_{Th}^2 + 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} + R_{carga}^2 - 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} - 2 \cdot R_{carga}^2 = 0$$

$$\boxed{R_{carga} = R_{Th}}$$

La condición de máxima potencia (activa) transferida es:

$$X_{carga} = -X_{Th} \text{ y } R_{carga} = R_{Th} \Rightarrow \boxed{Z_{carga} = Z_{Th}^*}$$

La potencia (activa) de transferencia máxima se puede calcular como:

$$P_{\max} = P_{R_{carga} = R_{Th}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{Th}}{(2 \cdot R_{Th})^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{V_{Th}^2}{R_{Th}} \quad (\text{Ec 4.9.2.6.1})$$

Para el caso particular de una carga puramente resistiva, la condición de máxima potencia (activa) transferida se calcula siguiendo los pasos anteriores:

$$P_{R_{carga}} = R_{carga} \cdot \left( \frac{V_{Th}}{|Z_{Th} + Z_{carga}|} \right)^2 = V_{Th}^2 \cdot \frac{R_{carga}}{(R_{Th} + R_{carga})^2 + X_{Th}^2}$$

Para calcular la resistencia que da la potencia (activa) máxima hay que igualar la primera derivada a cero:

$$\frac{dP_{R_{carga}}}{dR_{carga}} = V_{Th}^2 \cdot \frac{(R_{Th} + R_{carga})^2 + X_{Th}^2 - 2 \cdot (R_{Th} + R_{carga}) \cdot R_{carga}}{\left( (R_{Th} + R_{carga})^2 + X_{Th}^2 \right)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (R_{Th} + R_{carga})^2 + X_{Th}^2 - 2 \cdot (R_{Th} + R_{carga}) \cdot R_{carga} = \\
 &= R_{Th}^2 + 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} + R_{carga}^2 + X_{Th}^2 - 2 \cdot R_{Th} \cdot R_{carga} - 2 \cdot R_{carga}^2 = R_{Th}^2 + X_{Th}^2 - \\
 &R_{carga}^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$R_{carga} = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = Z_{Th}$$

## 5. Circuitos trifásicos

### 5.1. Introducción

Un circuito trifásico se define como aquel formado por solo dos elementos:

- Un generador trifásico constituido por tres generadores monofásicos conectados en estrella
- Una carga trifásica constituida por tres cargas monofásicas conectadas en estrella o en triángulo

A continuación se procede a describir por separado cada uno de los dos elementos mencionados anteriormente. Se supondrá que el generador trifásico opera en régimen permanente.

### 5.2. Generador trifásico

#### 5.2.1. Estructura

Un generador trifásico está constituido por tres generadores monofásicos conectados según se muestra en la siguiente figura:

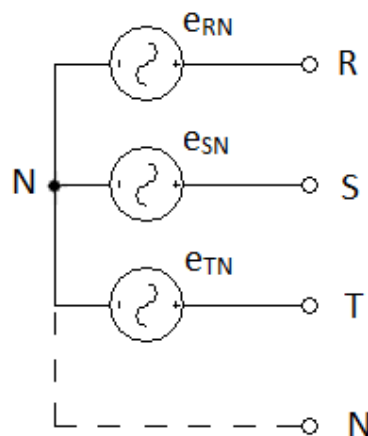


Figura 5.2.1.1. Estructura de un generador trifásico

El punto de conexión común a los tres generadores monofásicos se denomina neutro N del generador trifásico. Los extremos de polaridad positiva en los tres generadores monofásicos son siempre accesibles en el generador trifásico, dando lugar a tres terminales denominados R, S y T (fases). En cambio, el neutro N del generador trifásico puede ser accesible o no. Cuando lo es, da lugar a un cuarto terminal denominado N (neutro).

### 5.2.2. Tensiones fase-neutro, de fase, simples o sencillas

Las tensiones fase-neutro, de fase, simples o sencillas son tres tensiones alternas que tienen lugar entre R y N la primera, entre S y N la segunda y entre T y N la tercera. Dichas tensiones forman una terna de tensiones simétrica y equilibrada de secuencia directa.

- Simétrica y equilibrada porque los valores eficaces de las tres tensiones son idénticos y las tres tensiones están desfasadas entre sí  $120^\circ$
- De secuencia directa porque el orden temporal en el cual se suceden los máximos de dichas tensiones es primero el máximo de la tensión RN, a continuación el de la tensión SN y por último el de la tensión TN.

Las expresiones en función del tiempo de las tres tensiones fase-neutro son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{RN} &= \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) \\ e_{SN} &= \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ - 120^\circ) \\ e_{TN} &= \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ - 240^\circ) \end{aligned} \quad (\text{Ec 5.2.2.1})$$

La representación de estas tensiones fase-neutro en función del tiempo se muestra a continuación:

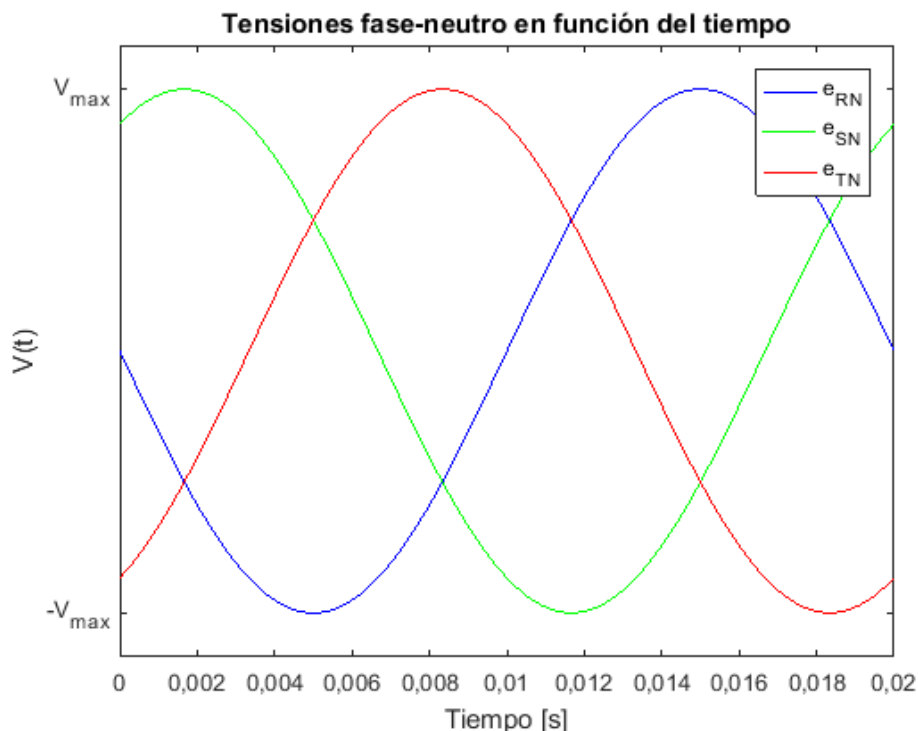


Figura 5.2.2.1. Tensiones fase-neutro en función del tiempo



Si sumamos las expresiones en función del tiempo de las tres tensiones fase-neutro resulta lo siguiente:

$$e_{RN} + e_{SN} + e_{TN} = \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ - 120^\circ) + \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ - 240^\circ) = 0$$

El diagrama fasorial de las tensiones fase-neutro es el siguiente:

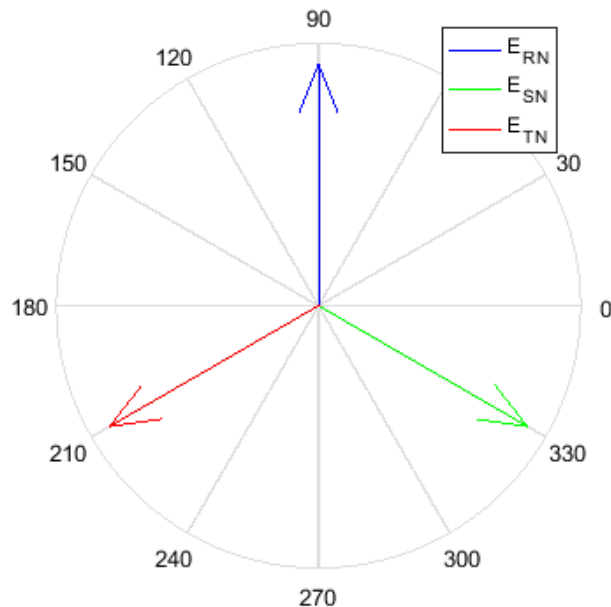


Figura 5.2.2.2. Diagrama fasorial de las tensiones fase-neutro

Si sumamos los fasores de las tres tensiones fase-neutro resulta lo siguiente:

$$\underline{E}_{RN} + \underline{E}_{SN} + \underline{E}_{TN} = E_F \angle 90^\circ + E_F \angle -30^\circ + E_F \angle -150^\circ = 0$$

### 5.2.3. Tensiones fase-fase, de línea o compuestas

Las tensiones fase-fase, de línea o compuestas son tres tensiones alternas que tienen lugar entre R y S la primera, entre S y T la segunda y entre T y R la tercera. Dichas tensiones, al igual que las tres tensiones fase-neutro, forman una terna de tensiones simétrica y equilibrada de secuencia directa.

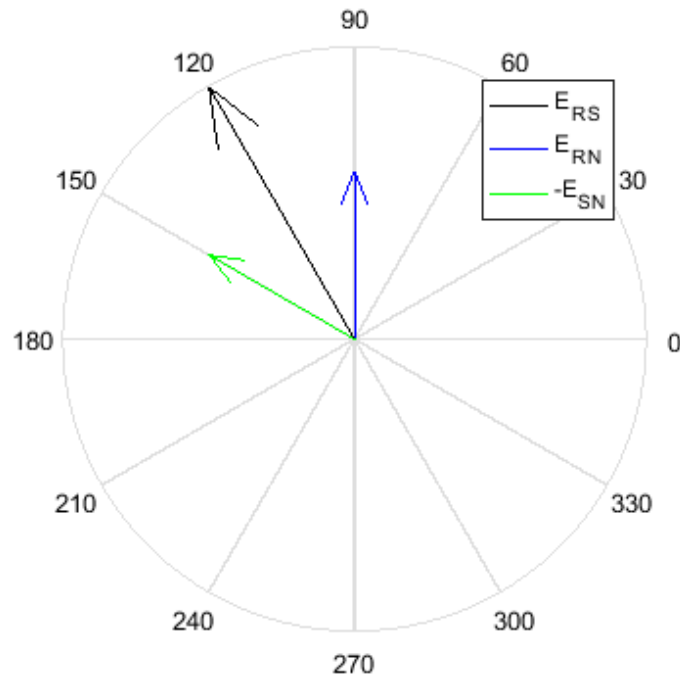
Las expresiones en función del tiempo de las tres tensiones fase-fase se pueden obtener aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito de la Figura 5.2.1.1: una vez para obtener la tensión RS, otra vez para obtener la tensión ST y una última vez para obtener la tensión TR.

La expresión en función del tiempo de la tensión RS se obtiene así:

$$\begin{aligned}
 e_{RS} &= e_{RN} - e_{SN} = \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) - \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t - 30^\circ) = \\
 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 120^\circ) = \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t + 120^\circ)
 \end{aligned}$$

El diagrama fasorial de obtención de la tensión RS es el siguiente:

**Diagrama fasorial de obtención de la tensión RS**



**Figura 5.2.3.1. Diagrama fasorial de obtención de la tensión RS**

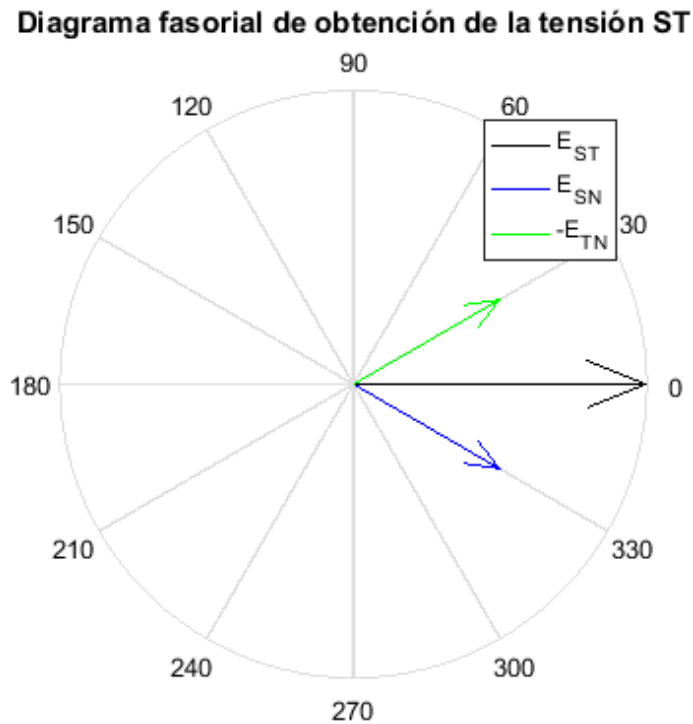
El anterior diagrama demuestra que operando fasorialmente se obtiene:

$$E_{RS} = E_{RN} - E_{SN} = E_F \angle 90^\circ - E_F \angle -30^\circ = \sqrt{3} \cdot E_F \angle 120^\circ = E_L \angle 120^\circ$$

La expresión en función del tiempo de la tensión ST se obtiene así:

$$\begin{aligned}
 e_{ST} &= e_{SN} - e_{TN} = \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t - 30^\circ) - \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t - 150^\circ) = \\
 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 0^\circ) = \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t + 0^\circ)
 \end{aligned}$$

El diagrama fasorial de obtención de la tensión ST es el siguiente:



**Figura 5.2.3.2. Diagrama fasorial de obtención de la tensión ST**

El anterior diagrama demuestra que operando fasorialmente se obtiene:

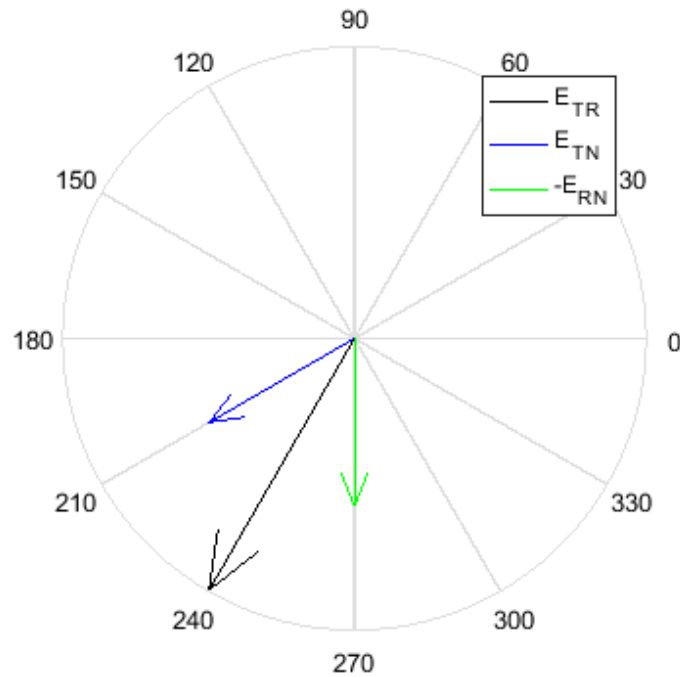
$$E_{ST} = E_{SN} - E_{TN} = E_F \angle -30^\circ - E_F \angle -150^\circ = \sqrt{3} \cdot E_F \angle 0^\circ = E_L \angle 0^\circ$$

La expresión en función del tiempo de la tensión TR se obtiene así:

$$\begin{aligned} e_{TR} &= e_{TN} - e_{RN} = \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t - 150^\circ) - \sqrt{2} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t + 90^\circ) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot E_F \cdot \cos(\omega \cdot t - 120^\circ) = \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t - 120^\circ) \end{aligned}$$

El diagrama fasorial de obtención de la tensión TR es el siguiente:

**Diagrama fasorial de obtención de la tensión TR**



**Figura 5.2.3.3. Diagrama fasorial de obtención de la tensión TR**

El anterior diagrama demuestra que operando fasorialmente se obtiene:

$$E_{TR} = E_{TN} - E_{RN} = E_F \angle -150^\circ - E_F \angle 90^\circ = \sqrt{3} \cdot E_F \angle -120^\circ = E_L \angle -120^\circ$$

Los anteriores cálculos han puesto de manifiesto que las tensiones fase-fase están relacionadas con las tensiones fase-neutro de la siguiente forma:

$$E_{RS} = \sqrt{3} \cdot E_{RN} = \sqrt{3} \cdot E_F = E_L$$

$$\arg(E_{RS}) = \arg(E_{RN}) + 30^\circ = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ \quad (\text{Ec 5.2.3.1})$$

$$E_{ST} = \sqrt{3} \cdot E_{SN} = \sqrt{3} \cdot E_F = E_L$$

$$\arg(E_{ST}) = \arg(E_{SN}) + 30^\circ = -30^\circ + 30^\circ = 0^\circ \quad (\text{Ec 5.2.3.2})$$

$$E_{TR} = \sqrt{3} \cdot E_{TN} = \sqrt{3} \cdot E_F = E_L$$

$$\arg(E_{TR}) = \arg(E_{TN}) + 30^\circ = -150^\circ + 30^\circ = -120^\circ \quad (\text{Ec 5.2.3.3})$$

Si sumamos las expresiones en función del tiempo de las tres tensiones fase-fase resulta lo siguiente:

$$e_{RS} + e_{ST} + e_{TR} = \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t + 120^\circ) + \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t + 0^\circ) + \sqrt{2} \cdot E_L \cdot \cos(\omega \cdot t - 120^\circ) = 0$$

El diagrama fasorial de las tensiones fase-fase es el siguiente:

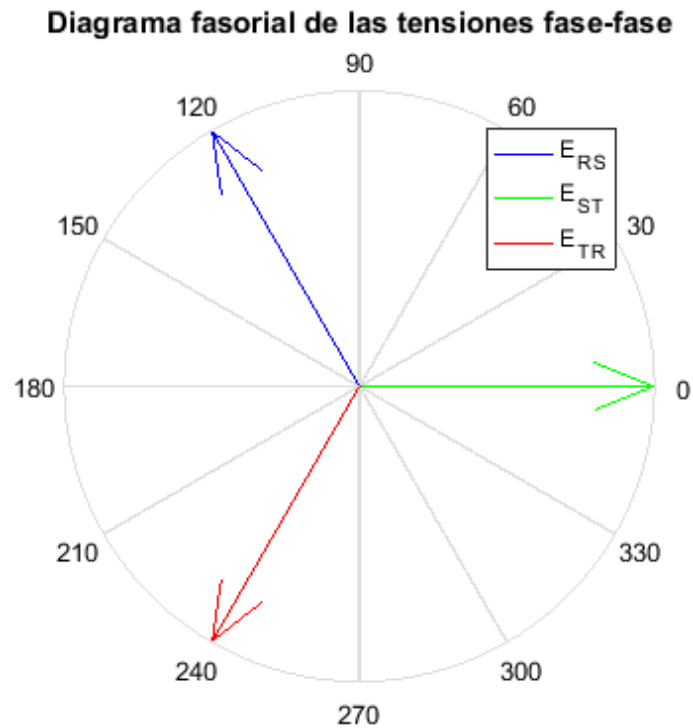


Figura 5.2.3.4. Diagrama fasorial de las tensiones fase-fase

Si sumamos los fasores de las tres tensiones fase-fase resulta lo siguiente:

$$E_{RS} + E_{ST} + E_{TR} = E_L \angle 120^\circ + E_L \angle 0^\circ + E_L \angle -120^\circ = 0$$

## 5.3. Cargas trifásicas

### 5.3.1. Estructuras

Una carga trifásica está constituida por tres cargas monofásicas conectadas en estrella o en triángulo según se muestra en la siguiente figura:

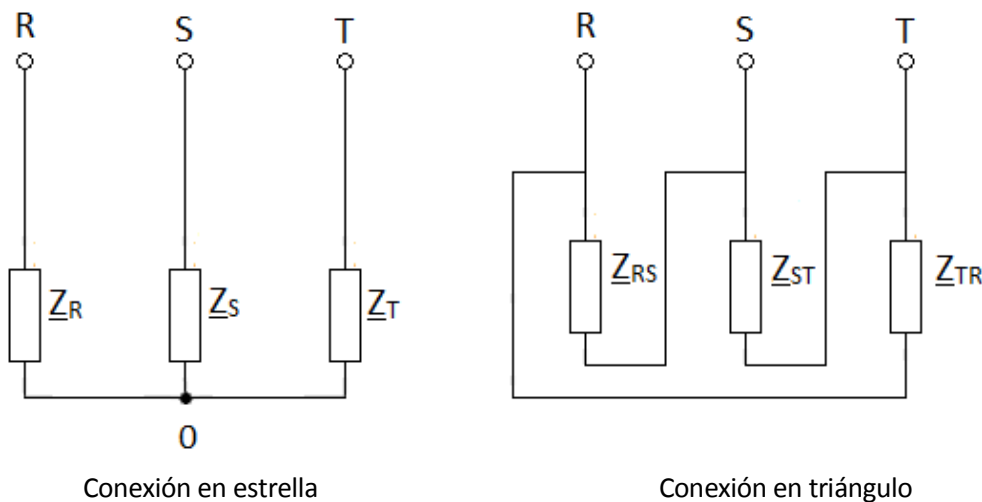


Figura 5.3.1.1. Estructuras de una carga trifásica

### 5.3.2. Fases de la carga en función de su estructura

Las fases de una carga en estrella son los brazos de la estrella.

Las fases de una carga en triángulo son los lados del triángulo.

### 5.3.3. Tipos

La tipología de una carga trifásica se establece en base a dos criterios:

- Igualdad o no de las impedancias de fase de la carga trifásica (carga equilibrada si hay igualdad, carga desequilibrada si no hay igualdad).
- Conexión o no del centro  $O$  de la estrella al neutro  $N$  del generador (carga en estrella conectada al neutro del generador si hay conexión, carga en estrella desconectada del neutro del generador si no hay conexión).

Así pues, se van a considerar seis tipos de cargas trifásicas:

- Carga en estrella equilibrada conectada al neutro del generador.
- Carga en estrella equilibrada desconectada del neutro del generador.
- Carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador.
- Carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador.
- Carga en triángulo equilibrada.
- Carga en triángulo desequilibrada.

## 5.4. Cálculo de tensiones y corrientes asociadas a las cargas trifásicas

### 5.4.1. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella equilibrada conectada al neutro del generador

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en estrella equilibrada conectada al neutro del generador, se tiene el siguiente esquema:

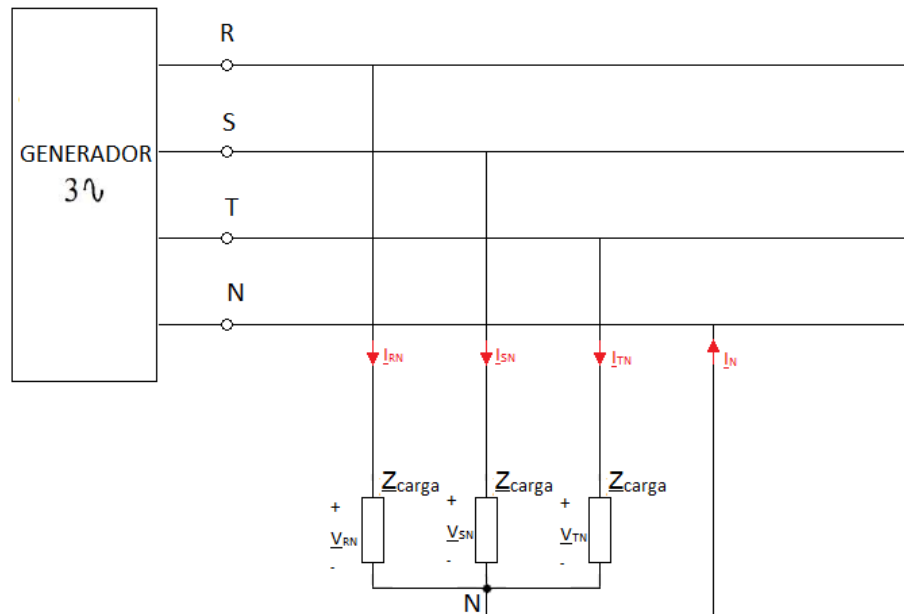


Figura 5.4.1.1. Generador que alimenta a carga en estrella equilibrada conectada al neutro del generador

Las tensiones de fase de la carga son iguales a las tensiones de fase del generador.

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{RN} & \underline{V}_{SN} & \underline{V}_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{RN} & \underline{E}_{SN} & \underline{E}_{TN} \end{bmatrix}$$

Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{RS} & \underline{V}_{ST} & \underline{V}_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{RS} & \underline{E}_{ST} & \underline{E}_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_{RN} &= \frac{\underline{V}_{RN}}{Z_{carga}} = \frac{\underline{E}_{RN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle 90^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle 90^\circ - \varphi = I_F \angle 90^\circ - \varphi \\ I_{SN} &= \frac{\underline{V}_{SN}}{Z_{carga}} = \frac{\underline{E}_{SN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle -30^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle -30^\circ - \varphi = I_F \angle -30^\circ - \varphi \end{aligned}$$

$$I_{TN} = \frac{V_{TN}}{Z_{carga}} = \frac{E_{TN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle -150^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle -150^\circ - \varphi = I_F \angle -150^\circ - \varphi$$

La suma de las tres corrientes de fase de la carga es nula.

$$I_{RN} + I_{SN} + I_{TN} = 0$$

Por lo tanto, la corriente que circula por el neutro es nula también.

$$I_N = 0$$

Las corrientes de línea y de fase de la carga son iguales en las conexiones en estrella. Además, tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

#### 5.4.2. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella equilibrada desconectada del neutro del generador

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en estrella equilibrada desconectada del neutro del generador, se tiene el siguiente esquema:

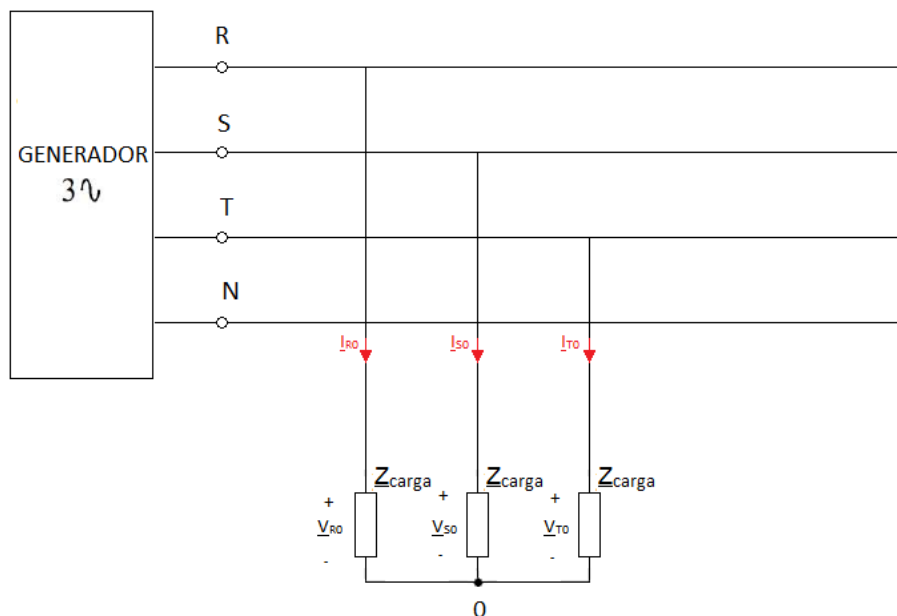


Figura 5.4.2.1. Generador que alimenta a carga en estrella equilibrada desconectada del neutro del generador

Las tensiones de fase de la carga son iguales a las tensiones de fase del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RO} & V_{SO} & V_{TO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RN} & E_{SN} & E_{TN} \end{bmatrix}$$



Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RS} & V_{ST} & V_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RS} & E_{ST} & E_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_{RO} &= \frac{V_{RO}}{Z_{carga}} = \frac{E_{RN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle 90^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle 90^\circ - \varphi = I_F \angle 90^\circ - \varphi \\ I_{SO} &= \frac{V_{SO}}{Z_{carga}} = \frac{E_{SN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle -30^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle -30^\circ - \varphi = I_F \angle -30^\circ - \varphi \\ I_{TO} &= \frac{V_{TO}}{Z_{carga}} = \frac{E_{TN}}{Z_{carga}} = \frac{E_F \angle -150^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_F}{Z_{carga}} \angle -150^\circ - \varphi = I_F \angle -150^\circ - \varphi \end{aligned}$$

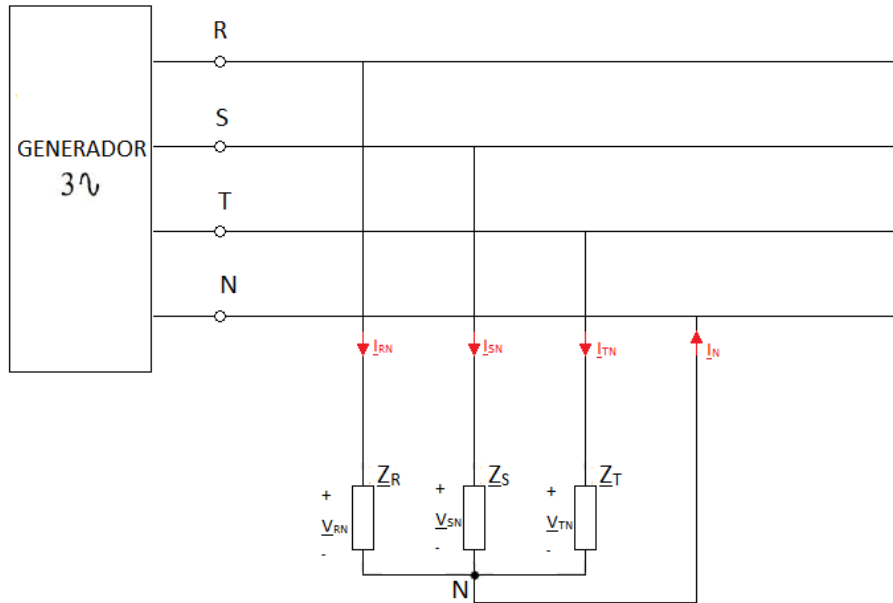
La suma de las tres corrientes de fase de la carga es nula.

$$I_{RO} + I_{SO} + I_{TO} = 0$$

Las corrientes de línea y de fase de la carga son iguales en las conexiones en estrella. Además, tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

### 5.4.3. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador, se tiene el siguiente esquema:



**Figura 5.4.3.1. Generador que alimenta a carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador**

Las tensiones de fase de la carga son iguales a las tensiones de fase del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RN} & V_{SN} & V_{TN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RN} & E_{SN} & E_{TN} \end{bmatrix}$$

Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RS} & V_{ST} & V_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RS} & E_{ST} & E_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_{RN} &= \frac{V_{RN}}{Z_R} = \frac{E_{RN}}{Z_R} = \frac{E_F \angle 90^\circ}{Z_R \angle \phi_R} = \frac{E_F}{Z_R} \angle 90^\circ - \phi_R \\ I_{SN} &= \frac{V_{SN}}{Z_S} = \frac{E_{SN}}{Z_S} = \frac{E_F \angle -30^\circ}{Z_S \angle \phi_S} = \frac{E_F}{Z_S} \angle -30^\circ - \phi_S \\ I_{TN} &= \frac{V_{TN}}{Z_T} = \frac{E_{TN}}{Z_T} = \frac{E_F \angle -150^\circ}{Z_T \angle \phi_T} = \frac{E_F}{Z_T} \angle -150^\circ - \phi_T \end{aligned}$$

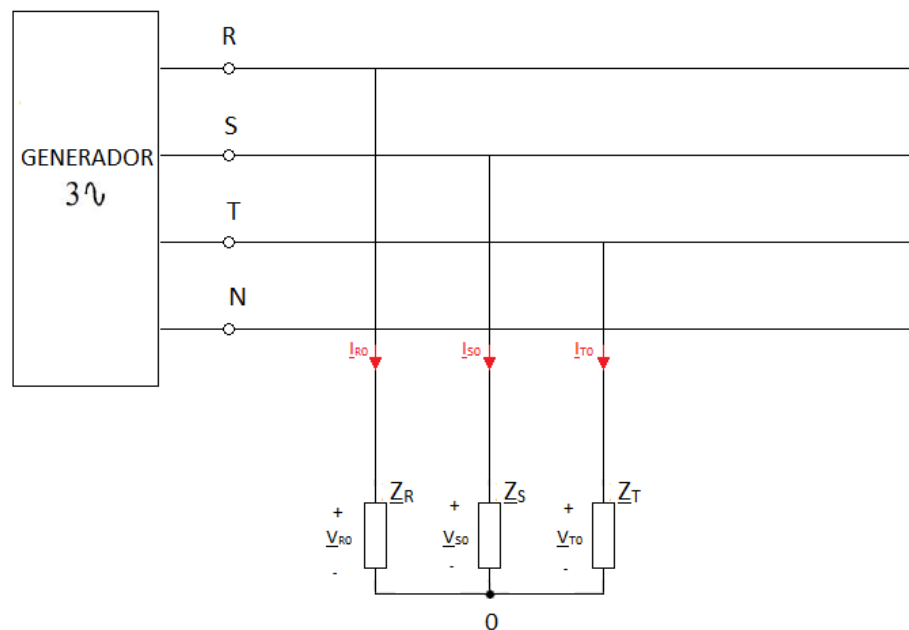
La suma de las tres corrientes de fase de la carga podría ser no nula y como resultado da la corriente que circula por el neutro.

$$I_N = I_{RN} + I_{SN} + I_{TN}$$

Las corrientes de línea y de fase de la carga son iguales en las conexiones en estrella. Además, tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

#### 5.4.4. Generador trifásico que alimenta a carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador, se tiene el siguiente esquema:



**Figura 5.4.4.1. Generador que alimenta a carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador**

Las tensiones de fase de la carga son distintas a las tensiones de fase del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RO} & V_{SO} & V_{TO} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} E_{RN} & E_{SN} & E_{TN} \end{bmatrix}$$

La suma de las corrientes de fase tiene que ser nula al no haber conexión al neutro del generador.

$$I_{RO} + I_{SO} + I_{TO} = 0$$

$$I_{RO} = \frac{V_{RO}}{Z_R} = Y_R \cdot V_{RO} \quad I_{SO} = \frac{V_{SO}}{Z_S} = Y_S \cdot V_{SO} \quad I_{TO} = \frac{V_{TO}}{Z_T} = Y_T \cdot V_{TO}$$

$$I_{RO} + I_{SO} + I_{TO} = Y_R \cdot V_{RO} + Y_S \cdot V_{SO} + Y_T \cdot V_{TO} = 0$$

Ahora se va a proceder a aplicar el Teorema de Millman. Este permite calcular la tensión de desplazamiento del centro  $O$  de la estrella respecto del neutro  $N$  del generador ( $\underline{V}_{ON}$ ).

Tensión de desplazamiento  $\underline{V}_{ON}$ :

$$\begin{aligned} \underline{E}_{RN} &= \underline{V}_{RO} + \underline{V}_{ON} & \underline{V}_{RO} &= \underline{E}_{RN} - \underline{V}_{ON} \\ \underline{E}_{SN} &= \underline{V}_{SO} + \underline{V}_{ON} & \underline{V}_{SO} &= \underline{E}_{SN} - \underline{V}_{ON} \\ \underline{E}_{TN} &= \underline{V}_{TO} + \underline{V}_{ON} & \underline{V}_{TO} &= \underline{E}_{TN} - \underline{V}_{ON} \end{aligned} \Rightarrow$$

Substituyendo en la ecuación anterior derivada de la suma de las corrientes de fase:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_R \cdot (\underline{E}_{RN} - \underline{V}_{ON}) + \underline{Y}_S \cdot (\underline{E}_{SN} - \underline{V}_{ON}) + \underline{Y}_T \cdot (\underline{E}_{TN} - \underline{V}_{ON}) &= 0 \\ (\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T) \cdot \underline{V}_{ON} &= \underline{Y}_R \cdot \underline{E}_{RN} + \underline{Y}_S \cdot \underline{E}_{SN} + \underline{Y}_T \cdot \underline{E}_{TN} \\ \underline{V}_{ON} &= \frac{\underline{Y}_R \cdot \underline{E}_{RN} + \underline{Y}_S \cdot \underline{E}_{SN} + \underline{Y}_T \cdot \underline{E}_{TN}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \end{aligned} \quad (\text{Ec 5.4.4.1})$$

Si se conectase el centro de la estrella al neutro del generador, la corriente que circularía por el neutro sería:

$$\underline{I}_N = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T) \cdot \underline{V}_{ON} = \underline{Y}_R \cdot \underline{E}_{RN} + \underline{Y}_S \cdot \underline{E}_{SN} + \underline{Y}_T \cdot \underline{E}_{TN}$$

Las tensiones de fase de la carga valen:

$$\begin{aligned} \underline{V}_{RO} &= \underline{E}_{RN} - \underline{V}_{ON} \\ \underline{V}_{SO} &= \underline{E}_{SN} - \underline{V}_{ON} \\ \underline{V}_{TO} &= \underline{E}_{TN} - \underline{V}_{ON} \end{aligned}$$

Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_{RS} & \underline{V}_{ST} & \underline{V}_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{RS} & \underline{E}_{ST} & \underline{E}_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{RO} &= \frac{\underline{V}_{RO}}{\underline{Z}_R} = \frac{V_{RO} \angle \varphi_{VRO}}{Z_R \angle \varphi_R} = \frac{V_{RO}}{Z_R} \angle \varphi_{VRO} - \varphi_R \\ \underline{I}_{SO} &= \frac{\underline{V}_{SO}}{\underline{Z}_S} = \frac{V_{SO} \angle \varphi_{VSO}}{Z_S \angle \varphi_S} = \frac{V_{SO}}{Z_S} \angle \varphi_{VSO} - \varphi_S \end{aligned}$$

$$I_{T0} = \frac{V_{T0}}{Z_T} = \frac{V_{T0} \angle \varphi_{VT0}}{Z_T \angle \varphi_T} = \frac{V_{T0}}{Z_T} \angle \varphi_{VT0} - \varphi_T$$

La suma de las tres corrientes de fase de la carga es nula.

$$I_{RO} + I_{SO} + I_{TO} = 0$$

Las corrientes de línea y de fase de la carga son iguales en las conexiones en estrella. Además, tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

#### 5.4.5. Generador trifásico que alimenta a carga en triángulo equilibrada

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en triángulo equilibrada, se tiene el siguiente esquema:

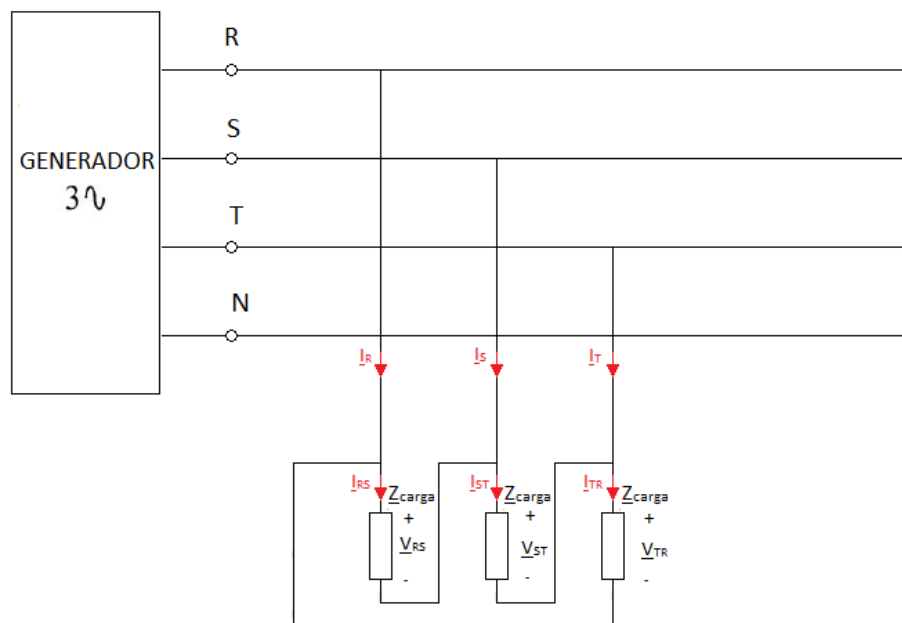


Figura 5.4.5.1. Generador que alimenta a carga en triángulo equilibrada

Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RS} & V_{ST} & V_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RS} & E_{ST} & E_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las tensiones de fase y de línea de la carga son iguales en las conexiones en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_{RS} &= \frac{V_{RS}}{Z_{carga}} = \frac{E_{RS}}{Z_{carga}} = \frac{E_L \angle 120^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_L}{Z_{carga}} \angle 120^\circ - \varphi = I_F \angle 120^\circ - \varphi \\ I_{ST} &= \frac{V_{ST}}{Z_{carga}} = \frac{E_{ST}}{Z_{carga}} = \frac{E_L \angle 0^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_L}{Z_{carga}} \angle 0^\circ - \varphi = I_F \angle -\varphi \\ I_{TR} &= \frac{V_{TR}}{Z_{carga}} = \frac{E_{TR}}{Z_{carga}} = \frac{E_L \angle -120^\circ}{Z_{carga} \angle \varphi} = \frac{E_L}{Z_{carga}} \angle -120^\circ - \varphi = I_F \angle -120^\circ - \varphi \end{aligned}$$

Las corrientes de línea de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_R &= I_{RS} - I_{TR} = I_F \angle 120^\circ - \varphi - I_F \angle -120^\circ - \varphi = \sqrt{3} \cdot I_F \angle 90^\circ - \varphi = I_L \angle 90^\circ - \varphi \\ I_S &= I_{ST} - I_{RS} = I_F \angle -\varphi - I_F \angle 120^\circ - \varphi = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -30^\circ - \varphi = I_L \angle -30^\circ - \varphi \\ I_T &= I_{TR} - I_{ST} = I_F \angle -120^\circ - \varphi - I_F \angle -\varphi = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -150^\circ - \varphi = I_L \angle -150^\circ - \varphi \end{aligned}$$

Tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

#### 5.4.6. Generador trifásico que alimenta a carga en triángulo desequilibrada

Cuando un generador trifásico alimenta a una carga en triángulo desequilibrada, se tiene el siguiente esquema:

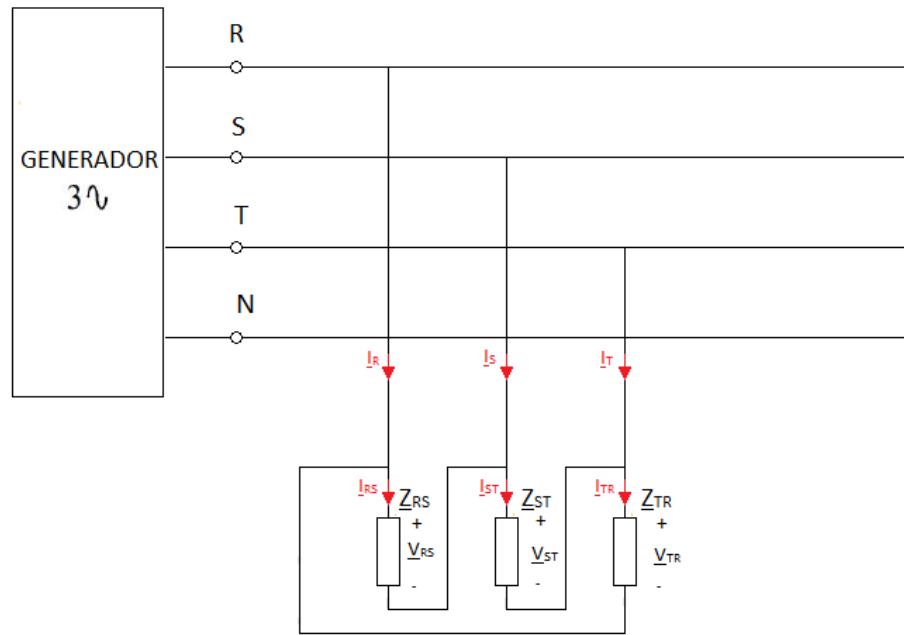


Figura 5.4.6.1. Generador que alimenta a carga en triángulo desequilibrada

Las tensiones de línea de la carga son iguales a las tensiones de línea del generador.

$$\begin{bmatrix} V_{RS} & V_{ST} & V_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{RS} & E_{ST} & E_{TR} \end{bmatrix}$$

Esto es cierto en estrella y en triángulo.

Las tensiones de fase y de línea de la carga son iguales en las conexiones en triángulo.

Las corrientes de fase de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_{RS} &= \frac{V_{RS}}{Z_{RS}} = \frac{E_{RS}}{Z_{RS}} = \frac{E_L \angle 120^\circ}{Z_{RS} \angle \varphi_{RS}} = \frac{E_L}{Z_{RS}} \angle 120^\circ - \varphi_{RS} \\ I_{ST} &= \frac{V_{ST}}{Z_{ST}} = \frac{E_{ST}}{Z_{ST}} = \frac{E_L \angle 0^\circ}{Z_{ST} \angle \varphi_{ST}} = \frac{E_L}{Z_{ST}} \angle 0^\circ - \varphi_{ST} \\ I_{TR} &= \frac{V_{TR}}{Z_{TR}} = \frac{E_{TR}}{Z_{TR}} = \frac{E_L \angle -120^\circ}{Z_{TR} \angle \varphi_{TR}} = \frac{E_L}{Z_{TR}} \angle -120^\circ - \varphi_{TR} \end{aligned}$$

Las corrientes de línea de la carga se calculan:

$$\begin{aligned} I_R &= I_{RS} - I_{TR} \\ I_S &= I_{ST} - I_{RS} \\ I_T &= I_{TR} - I_{ST} \end{aligned}$$

Tanto en estrella como en triángulo, las corrientes de línea del generador son iguales a las corrientes de línea de la carga y, si hubiese varias cargas conectadas en paralelo con el generador, las corrientes de línea del generador serían la suma de las corrientes de línea de las diferentes cargas.

## 5.5. Cálculo de potencias absorbidas por las cargas trifásicas

### 5.5.1. Carga en estrella equilibrada

En las siguientes expresiones  $O \equiv N$  si la carga está conectada al neutro del generador.

#### 5.5.1.1. Potencia activa

Primero se va a hacer el cálculo de potencia activa consumida por una fase (la R):

$$\begin{aligned} P_R &= V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \cos(\varphi) = E_{RN} \cdot I_{RO} \cdot \cos(\varphi) = \\ &= E_{RN} \cdot I_{RO} \cdot \cos(\arg(E_{RN}) - \arg(I_{RO})) \end{aligned}$$

En una carga equilibrada la potencia activa consumida es igual en todas las fases.

$$\begin{aligned} P_R &= P_S = P_T = P_{\text{monofásica}} \\ P_{\text{monofásica}} &= V_F \cdot I_F \cdot \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La potencia activa total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$\begin{aligned} P_{\text{trifásica}} &= 3 \cdot P_R = 3 \cdot P_{\text{monofásica}} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos(\varphi) = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos(\varphi) \\ \boxed{P_{\text{trifásica}} &= \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)} \end{aligned} \quad (\text{Ec 5.5.1.1.1})$$

#### 5.5.1.2. Potencia reactiva

Primero se va a hacer el cálculo de potencia reactiva consumida por una fase (la R):

$$\begin{aligned} Q_R &= V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \sin(\varphi) = E_{RN} \cdot I_{RO} \cdot \sin(\varphi) = \\ &= E_{RN} \cdot I_{RO} \cdot \sin(\arg(E_{RN}) - \arg(I_{RO})) \end{aligned}$$

En una carga equilibrada la potencia reactiva consumida es igual en todas las fases.

$$\begin{aligned} Q_R &= Q_S = Q_T = Q_{\text{monofásica}} \\ Q_{\text{monofásica}} &= V_F \cdot I_F \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



La potencia reactiva total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$Q_{trifásica} = 3 \cdot Q_R = 3 \cdot Q_{monofásica} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \sin(\varphi) = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \sin(\varphi)$$

$$Q_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin(\varphi)$$

(Ec 5.5.1.2.1)

### 5.5.1.3. Potencia compleja

Primero se va a hacer el cálculo de potencia compleja consumida por una fase (la R):

$$\underline{S}_R = \underline{V}_{RO} \cdot \underline{I}_{RO}^* = \underline{E}_{RN} \cdot \underline{I}_{RO}^* = \underline{E}_{RN} \cdot \underline{I}_{RO} \angle \varphi$$

En una carga equilibrada la potencia compleja consumida es igual en todas las fases.

$$\underline{S}_R = \underline{S}_S = \underline{S}_T = \underline{S}_{monofásica}$$

$$\underline{S}_{monofásica} = V_F \cdot I_F \angle \varphi$$

La potencia compleja total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$\underline{S}_{trifásica} = 3 \cdot \underline{S}_R = 3 \cdot \underline{S}_{monofásica} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \angle \varphi = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \angle \varphi$$

$$\underline{S}_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \angle \varphi$$

(Ec 5.5.1.3.1)

### 5.5.1.4. Potencia aparente

Primero se va a hacer el cálculo de potencia aparente consumida por una fase (la R):

$$S_R = V_{RO} \cdot I_{RO} = E_{RN} \cdot I_{RO}$$

En una carga equilibrada la potencia aparente consumida es igual en todas las fases.

$$S_R = S_S = S_T = S_{monofásica}$$

$$S_{monofásica} = V_F \cdot I_F$$

La potencia aparente total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$S_{trifásica} = 3 \cdot S_R = 3 \cdot S_{monofásica} = 3 \cdot V_F \cdot I_F = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L$$

$$S_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$$

(Ec 5.5.1.4.1)

### 5.5.2. Carga en estrella desequilibrada conectada al neutro del generador

#### 5.5.2.1. Potencia activa

Se van a calcular las potencias activas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\begin{aligned}
 P_R &= V_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \cos(\varphi_R) = E_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \cos(\varphi_R) = \\
 &E_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \cos(\arg(E_{RN}) - \arg(I_{RN})) \\
 P_S &= V_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \cos(\varphi_S) = E_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \cos(\varphi_S) = \\
 &= E_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \cos(\arg(E_{SN}) - \arg(I_{SN})) \\
 P_T &= V_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \cos(\varphi_T) = E_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \cos(\varphi_T) = \\
 &= E_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \cos(\arg(E_{TN}) - \arg(I_{TN}))
 \end{aligned}$$

La potencia activa total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias activas de cada una de las tres fases.

$$P_{trifásica} = P_R + P_S + P_T \quad (\text{Ec 5.5.2.1.1})$$

#### 5.5.2.2. Potencia reactiva

Se van a calcular las potencias reactivas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\begin{aligned}
 Q_R &= V_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \sin(\varphi_R) = E_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \sin(\varphi_R) = \\
 &= E_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \sin(\arg(E_{RN}) - \arg(I_{RN})) \\
 Q_S &= V_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \sin(\varphi_S) = E_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \sin(\varphi_S) = \\
 &= E_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \sin(\arg(E_{SN}) - \arg(I_{SN})) \\
 Q_T &= V_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \sin(\varphi_T) = E_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \sin(\varphi_T) = \\
 &= E_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \sin(\arg(E_{TN}) - \arg(I_{TN}))
 \end{aligned}$$

La potencia reactiva total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias reactivas de cada una de las tres fases.

$$Q_{trifásica} = Q_R + Q_S + Q_T \quad (\text{Ec 5.5.2.2.1})$$

#### 5.5.2.3. Potencia compleja

Se van a calcular las potencias complejas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\underline{S}_R = \underline{V}_{RN} \cdot \underline{I}_{RN}^* = \underline{E}_{RN} \cdot \underline{I}_{RN}^* = E_{RN} \cdot I_{RN} \angle \varphi_R$$

$$\underline{S}_S = \underline{V}_{SN} \cdot \underline{I}_{SN}^* = \underline{E}_{SN} \cdot \underline{I}_{SN}^* = E_{SN} \cdot I_{SN} \angle \varphi_S$$

$$\underline{S}_T = \underline{V}_{TN} \cdot \underline{I}_{TN}^* = \underline{E}_{TN} \cdot \underline{I}_{TN}^* = E_{TN} \cdot I_{TN} \angle \varphi_T$$

La potencia compleja total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias complejas de cada una de las tres fases.

$$\underline{S}_{trifásica} = \underline{S}_R + \underline{S}_S + \underline{S}_T \quad (\text{Ec 5.5.2.3.1})$$

#### 5.5.2.4. Potencia aparente

Se van a calcular las potencias aparentes consumidas por cada una de las tres fases:

$$S_R = V_{RN} \cdot I_{RN} = E_{RN} \cdot I_{RN}$$

$$S_S = V_{SN} \cdot I_{SN} = E_{SN} \cdot I_{SN}$$

$$S_T = V_{TN} \cdot I_{TN} = E_{TN} \cdot I_{TN}$$

La potencia aparente total trifásica consumida por la carga no será la suma de las potencias aparentes de cada una de las tres fases. En realidad, será:

$$S_{trifásica} = \sqrt{P_{trifásica}^2 + Q_{trifásica}^2} \quad (\text{Ec 5.5.2.4.1})$$

### 5.5.3. Carga en estrella desequilibrada desconectada del neutro del generador

#### 5.5.3.1. Potencia activa

Se van a calcular las potencias activas consumidas por cada una de las tres fases:

$$P_R = V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \cos(\varphi_R) = V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \cos(\arg(\underline{V}_{RO}) - \arg(\underline{I}_{RO}))$$

$$P_S = V_{SO} \cdot I_{SO} \cdot \cos(\varphi_S) = V_{SO} \cdot I_{SO} \cdot \cos(\arg(\underline{V}_{SO}) - \arg(\underline{I}_{SO}))$$

$$P_T = V_{TO} \cdot I_{TO} \cdot \cos(\varphi_T) = V_{TO} \cdot I_{TO} \cdot \cos(\arg(\underline{V}_{TO}) - \arg(\underline{I}_{TO}))$$

La potencia activa total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias activas de cada una de las tres fases.

$$P_{trifásica} = P_R + P_S + P_T \quad (\text{Ec 5.5.3.1.1})$$

### 5.5.3.2. Potencia reactiva

Se van a calcular las potencias reactivas consumidas por cada una de las tres fases:

$$Q_R = V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \sin(\varphi_R) = V_{RO} \cdot I_{RO} \cdot \sin(\arg(V_{RO}) - \arg(I_{RO}))$$

$$Q_S = V_{SO} \cdot I_{SO} \cdot \sin(\varphi_S) = V_{SO} \cdot I_{SO} \cdot \sin(\arg(V_{SO}) - \arg(I_{SO}))$$

$$Q_T = V_{TO} \cdot I_{TO} \cdot \sin(\varphi_T) = V_{TO} \cdot I_{TO} \cdot \sin(\arg(V_{TO}) - \arg(I_{TO}))$$

La potencia reactiva total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias reactivas de cada una de las tres fases.

$$Q_{trifásica} = Q_R + Q_S + Q_T \quad (\text{Ec 5.5.3.2.1})$$

### 5.5.3.3. Potencia compleja

Se van a calcular las potencias complejas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\underline{S}_R = \underline{V}_{RO} \cdot \underline{I}_{RO}^* = V_{RO} \cdot I_{RO} \angle \varphi_R$$

$$\underline{S}_S = \underline{V}_{SO} \cdot \underline{I}_{SO}^* = V_{SO} \cdot I_{SO} \angle \varphi_S$$

$$\underline{S}_T = \underline{V}_{TO} \cdot \underline{I}_{TO}^* = V_{TO} \cdot I_{TO} \angle \varphi_T$$

La potencia compleja total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias complejas de cada una de las tres fases.

$$\underline{S}_{trifásica} = \underline{S}_R + \underline{S}_S + \underline{S}_T \quad (\text{Ec 5.5.3.3.1})$$

### 5.5.3.4. Potencia aparente

Se van a calcular las potencias aparentes consumidas por cada una de las tres fases:

$$S_{RO} = V_{RO} \cdot I_{RO}$$

$$S_{SO} = V_{SO} \cdot I_{SO}$$

$$S_{TO} = V_{TO} \cdot I_{TO}$$

La potencia aparente total trifásica consumida por la carga no será la suma de las potencias aparentes de cada una de las tres fases. En realidad, será:

$$S_{trifásica} = \sqrt{P_{trifásica}^2 + Q_{trifásica}^2} \quad (\text{Ec 5.5.3.4.1})$$

## 5.5.4. Carga en triángulo equilibrada

### 5.5.4.1. Potencia activa

Primero se va a hacer el cálculo de potencia activa consumida por una fase (la RS):

$$P_{RS} = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \cos(\varphi) = E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \cos(\varphi) = \\ E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \cos(\arg(E_{RS}) - \arg(I_{RS}))$$

En una carga equilibrada la potencia activa consumida es igual en todas las fases.

$$P_{RS} = P_{ST} = P_{TR} = P_{monofásica} \\ P_{monofásica} = V_F \cdot I_F \cdot \cos(\varphi)$$

La potencia activa total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$P_{trifásica} = 3 \cdot P_{RS} = 3 \cdot P_{monofásica} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos(\varphi) = 3 \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\varphi) \\ \boxed{P_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi)} \quad (\text{Ec 5.5.4.1.1})$$

### 5.5.4.2. Potencia reactiva

Primero se va a hacer el cálculo de potencia reactiva consumida por una fase (la RS):

$$Q_{RS} = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\varphi) = E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\varphi) = \\ = E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\arg(E_{RS}) - \arg(I_{RS}))$$

En una carga equilibrada la potencia reactiva consumida es igual en todas las fases.

$$Q_{RS} = Q_{ST} = Q_{TR} = Q_{monofásica} \\ Q_{monofásica} = V_F \cdot I_F \cdot \sin(\varphi)$$

La potencia reactiva total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$Q_{trifásica} = 3 \cdot Q_{RS} = 3 \cdot Q_{monofásica} = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \sin(\varphi) = 3 \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\varphi) \\ \boxed{Q_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin(\varphi)} \quad (\text{Ec 5.5.4.2.1})$$

### 5.5.4.3. Potencia compleja

Primero se va a hacer el cálculo de potencia compleja consumida por una fase (la RS):

$$\underline{S}_{RS} = \underline{V}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS}^* = \underline{E}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS}^* = \underline{E}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS} \angle \varphi$$

En una carga equilibrada la potencia compleja consumida es igual en todas las fases.

$$\underline{S}_{RS} = \underline{S}_{ST} = \underline{S}_{TR} = \underline{S}_{monofásica}$$

$$\underline{S}_{monofásica} = \underline{V}_F \cdot \underline{I}_F \angle \varphi$$

La potencia compleja total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$\underline{S}_{trifásica} = 3 \cdot \underline{S}_{RS} = 3 \cdot \underline{S}_{monofásica} = 3 \cdot \underline{V}_F \cdot \underline{I}_F \angle \varphi = 3 \cdot \underline{V}_L \cdot \frac{\underline{I}_L}{\sqrt{3}} \angle \varphi$$

$$\boxed{\underline{S}_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot \underline{V}_L \cdot \underline{I}_L \angle \varphi} \quad (\text{Ec 5.5.4.3.1})$$

#### 5.5.4.4. Potencia aparente

Primero se va a hacer el cálculo de potencia aparente consumida por una fase (la RS):

$$S_{RS} = \underline{V}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS} = \underline{E}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS}$$

En una carga equilibrada la potencia aparente consumida es igual en todas las fases.

$$S_{RS} = S_{ST} = S_{TR} = S_{monofásica}$$

$$S_{monofásica} = \underline{V}_F \cdot \underline{I}_F$$

La potencia aparente total trifásica consumida por la carga será la suma de las de las tres fases.

$$S_{trifásica} = 3 \cdot S_{RS} = 3 \cdot S_{monofásica} = 3 \cdot \underline{V}_F \cdot \underline{I}_F = 3 \cdot \underline{V}_L \cdot \frac{\underline{I}_L}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{S_{trifásica} = \sqrt{3} \cdot \underline{V}_L \cdot \underline{I}_L} \quad (\text{Ec 5.5.4.4.1})$$

#### 5.5.5. Carga en triángulo desequilibrada

##### 5.5.5.1. Potencia activa

Se van a calcular las potencias activas consumidas por cada una de las tres fases:

$$P_{RS} = \underline{V}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS} \cdot \cos(\varphi_{RS}) = \underline{E}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS} \cdot \cos(\varphi_{RS}) =$$

$$= \underline{E}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS} \cdot \cos(\arg(\underline{E}_{RS}) - \arg(\underline{I}_{RS}))$$

$$\begin{aligned} P_{ST} &= V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \cos(\varphi_{ST}) = E_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \cos(\varphi_{ST}) = \\ &= E_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \cos(\arg(E_{ST}) - \arg(I_{ST})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{TR} &= V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \cos(\varphi_{TR}) = E_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \cos(\varphi_{TR}) = \\ &= E_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \cos(\arg(E_{TR}) - \arg(I_{TR})) \end{aligned}$$

La potencia activa total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias activas de cada una de las tres fases.

$$P_{trifásica} = P_{RS} + P_{ST} + P_{TR} \quad (\text{Ec 5.5.5.1.1})$$

### 5.5.5.2. Potencia reactiva

Se van a calcular las potencias reactivas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\begin{aligned} Q_{RS} &= V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\varphi_{RS}) = E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\varphi_{RS}) = \\ &= E_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \sin(\arg(E_{RS}) - \arg(I_{RS})) \\ Q_{ST} &= V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \sin(\varphi_{ST}) = E_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \sin(\varphi_{ST}) = \\ &= E_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \sin(\arg(E_{ST}) - \arg(I_{ST})) \\ Q_{TR} &= V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \sin(\varphi_{TR}) = E_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \sin(\varphi_{TR}) = \\ &= E_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \sin(\arg(E_{TR}) - \arg(I_{TR})) \end{aligned}$$

La potencia reactiva total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias reactivas de cada una de las tres fases.

$$Q_{trifásica} = Q_{RS} + Q_{ST} + Q_{TR} \quad (\text{Ec 5.5.5.2.1})$$

### 5.5.5.3. Potencia compleja

Se van a calcular las potencias complejas consumidas por cada una de las tres fases:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{RS} &= \underline{V}_{RS} \cdot \underline{I}_{RS}^* = E_{RS} \cdot \underline{I}_{RS}^* = E_{RS} \cdot I_{RS} \angle \varphi_{RS} \\ \underline{S}_{ST} &= \underline{V}_{ST} \cdot \underline{I}_{ST}^* = E_{ST} \cdot \underline{I}_{ST}^* = E_{ST} \cdot I_{ST} \angle \varphi_{ST} \\ \underline{S}_{TR} &= \underline{V}_{TR} \cdot \underline{I}_{TR}^* = E_{TR} \cdot \underline{I}_{TR}^* = E_{TR} \cdot I_{TR} \angle \varphi_{TR} \end{aligned}$$

La potencia compleja total trifásica consumida por la carga será la suma de las potencias complejas de cada una de las tres fases.

$$\underline{S}_{trifásica} = \underline{S}_{RS} + \underline{S}_{ST} + \underline{S}_{TR} \quad (\text{Ec 5.5.5.3.1})$$

#### 5.5.5.4. Potencia aparente

Se van a calcular las potencias aparentes consumidas por cada una de las tres fases:

$$\begin{aligned} S_{RS} &= V_{RS} \cdot I_{RS} = E_{RS} \cdot I_{RS} \\ S_{ST} &= V_{ST} \cdot I_{ST} = E_{ST} \cdot I_{ST} \\ S_{TR} &= V_{TR} \cdot I_{TR} = E_{TR} \cdot I_{TR} \end{aligned}$$

La potencia aparente total trifásica consumida por la carga no será la suma de las potencias aparentes de cada una de las tres fases. En realidad, será:

$$S_{trifásica} = \sqrt{P_{trifásica}^2 + Q_{trifásica}^2} \quad (\text{Ec 5.5.5.4.1})$$

#### 5.5.6. Mejora del factor de potencia en circuitos trifásicos equilibrados

Cuando la potencia compleja generada en un sistema y la potencia compleja absorbida en la carga son iguales, el generador y la carga comparten el factor de potencia. Al igual que en los circuitos monofásicos, el factor de potencia a veces es conveniente aumentarlo, para consumir menos potencia reactiva. Para aumentar el factor de potencia, hay que disminuir el ángulo  $\varphi$ . Para ello, hay que aumentar la potencia activa o disminuir la potencia reactiva. La opción más adecuada es disminuir la potencia reactiva, ya que así también se disminuye la potencia aparente. Aumentando la potencia activa, también aumentaríamos la potencia aparente, lo cual no es conveniente.

En circuitos trifásicos equilibrados, la potencia activa de una fase es un tercio de la potencia total trifásica.

$$P = \frac{P_{trifásica}}{3}$$

La capacidad del condensador necesario para mejorar el factor de potencia en un circuito monofásico es:

$$C = \frac{P \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega \cdot V_C^2}$$

Siendo  $\varphi'$  el ángulo asociado al factor de potencia objetivo.

Para el caso de un sistema trifásico, la capacidad del condensador de cada fase de la batería trifásica valdrá:



$$C = \frac{\frac{P_{trifásica}}{3} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega \cdot V_F^2} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot V_F^2}$$

Si los condensadores de la batería se conectan en estrella, el cálculo de la capacidad en función de la tensión de línea es:

$$C_{estrella} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot V_F^2} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$C_{estrella} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{\omega \cdot V_L^2}$$

(Ec 5.5.6.1)

Siendo:

$$Q_{Ctrifásica} = P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) < 0$$

Si los condensadores de la batería se conectan en triángulo, el cálculo de la capacidad en función de la tensión de línea es:

$$C_{triángulo} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot V_F^2} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot V_L^2}$$

$$C_{triángulo} = \frac{P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3 \cdot \omega \cdot V_L^2}$$

(Ec 5.5.6.2)

Siendo:

$$Q_{Ctrifásica} = P_{trifásica} \cdot (\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) < 0$$

A partir de las dos expresiones anteriormente obtenidas para la capacidad, se deduce la relación entre la capacidad de los condensadores según su conexión en la batería:

$$C_{estrella} = 3 \cdot C_{triángulo}$$

(Ec 5.5.6.3)



## 6. Análisis de impacto ambiental

En el presente apartado se analiza el impacto ambiental de este TFG. El TFG es de carácter teórico y de programación, por lo que no se implementa nada físico. Así pues, el presente análisis no refleja acciones contaminantes relacionadas con la creación o fabricación derivadas del objeto del trabajo. Sin embargo, se han producido otro tipo de residuos con la elaboración de este TFG, los cuales se van a diferenciar en dos apartados:

- Residuos informáticos: son aquellos relacionados con los equipos informáticos (tóner de impresora, cartuchos de tinta, fotocopidora, etc).
- Residuos de oficina: son aquellos materiales reciclables relacionados con los materiales de oficina de papel (fotocopias, documentos, borradores, etc). Los elementos más difíciles de reciclar (utensilios de escritura y fundas de plástico) se consideran despreciables por su bajo impacto ambiental.

	Residuos informáticos	Residuos de oficina
Recopilación de información y estudio previo	800 gr	200 hojas
Redacción de memoria y anexo	2000 gr	500 hojas
Programación	240 gr	60 hojas

Los residuos generados en la elaboración del proyecto son reciclados en los puntos habilitados a tal efecto. Se ha hecho un uso de equipos informáticos para intentar minimizar el gasto de hojas y reducir el impacto ambiental.



## 7. Presupuesto

A continuación se procede a hacer un estudio económico del proyecto realizado. Dicho estudio se ha diferenciado en dos partes, el coste de recursos humanos y el coste de recursos materiales.

Primero se va a calcular el coste de recursos humanos, a partir de las horas dedicadas a cada parte del proyecto y un coste unitario por hora.

	Horas (h)	Coste unitario (€/h)	Coste total (€)
Recopilación de información y estudio previo	70	16	1.120,00
Redacción de memoria y anexo	200	16	3.200,00
Programación	160	16	2.560,00
<b>TOTAL</b>			<b>6.880,00</b>

El coste de recursos materiales es el relacionado con licencias de software, hardware, material de oficina y el consumo eléctrico.

	Coste total (€)
MATLAB and Simulink Student Suite	69,00
Office Hogar y Estudiantes 2019	149,00
Equipos informáticos	300,00
Material de oficina	150,00
Consumo eléctrico	140,00
<b>TOTAL</b>	<b>808,00</b>

Por último, para conocer el coste total del proyecto, se sumarán los costes de recursos humanos y de recursos materiales, así como aplicar el IVA (impuesto sobre el valor añadido).

Coste de los recursos humanos	6.880,00 €
Coste de los recursos materiales	808,00 €
Coste total	7.688,00 €
IVA(21%)	1.614,48 €
<b>Coste total del proyecto</b>	<b>9.302,48 €</b>

## 8. Conclusiones

Fruto del TFG desarrollado, se dispone de material de soporte docente con contenidos asociados a la asignatura de Electrotecnia, presente (con este u otro nombre) en los planes de estudios de escuelas en las que se imparten conocimientos sobre Electricidad o Ingeniería. En particular, se han llevado a cabo:

- Unos apuntes que comprenden el contenido fundamental de la asignatura en relación a dos tipos de circuitos: monofásicos y trifásicos. Los circuitos monofásicos se estudian tanto en régimen permanente con alimentación continua como en régimen permanente con alimentación alterna, haciendo alguna pequeña incursión en su funcionamiento en régimen transitorio. Los circuitos trifásicos, sin embargo, solo se estudian en régimen permanente con alimentación alterna.
- Unos programas en Matlab para consolidar el aprendizaje del temario tratado en los apuntes anteriores. Estos programas se ha procurado que sean de fácil utilización para el usuario interactuando a través de la ventana de comandos de Matlab.

Así pues, los objetivos marcados inicialmente para este TFG se han cumplido satisfactoriamente.

Como futuros trabajos derivados de este TFG, se contempla la dirección de otros TFG adicionales que continúen con la elaboración de material de soporte docente para la asignatura de Electrotecnia en relación a los siguientes aspectos:

- Apuntes que abarquen los temas de aparatos de medida en circuitos monofásicos y trifásicos (voltímetros, amperímetros y vatímetros), transformadores monofásicos y trifásicos, además de análisis de redes eléctricas.
- Programas en Matlab para facilitar la asimilación del temario tratado en los apuntes antes mencionados. Estos nuevos programas, así como los programas resultantes del presente TFG, constituirán el motor de cálculo de una herramienta informática en entorno Matlab, que dispondrá de una interfaz gráfica de usuario desarrollada mediante App Designer. Así pues, la interacción con el usuario ya no será a través de la ventana de comandos de Matlab, sino a través de la interfaz gráfica creada.





## 9. Bibliografía

PEDRA DURÁN, JOAQUIM, 1999, *Circuitos monofásicos y trifásicos*. 2 edición. Barcelona : Edicions UPC.

GARCÍA-ALZÓRRIZ PARDO, JUAN ANTONIO y MESAS GARCÍA, JUAN JOSÉ, 2014, *SISTEMAS ELÉCTRICOS Tema 1: Introducción*.

GARCÍA-ALZÓRRIZ PARDO, JUAN ANTONIO, 2014, *SISTEMAS ELÉCTRICOS Tema 2: Análisis de circuitos resistivos*.

GARCÍA-ALZÓRRIZ PARDO, JUAN ANTONIO, 2013, *SISTEMAS ELÉCTRICOS Tema 3: Régimen Sinusoidal Permanente. Sistemas Monofásicos*.

GARCÍA-ALZÓRRIZ PARDO, JUAN ANTONIO, 2013, *SISTEMAS ELÉCTRICOS Tema 4: Régimen Sinusoidal Permanente. Sistemas Trifásicos*.

OSEIRA GOAS, RODOLFO, 2016, *Apuntes Sistemas Eléctricos*.

Documentación MATLAB - MathWorks España, 2019. <https://es.mathworks.com/help/> [en línea].